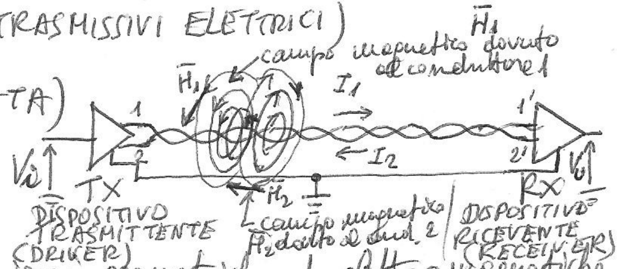
Prof. a.s. 1999/2000

CENNI TECNOLOGICI SULLE LINEE DI TRASMISSIONE

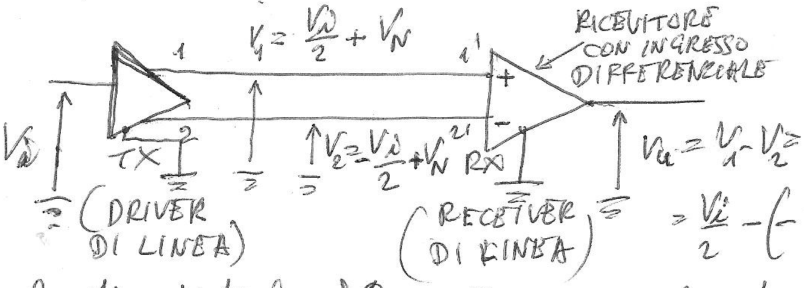
(MEZZI TRASMISSIVI ELETTRICI)

DOPPINO (LINEA BILANCIATA)



CIASCUN CONDUTTORE SI trova nelle medesime condizioni geometriche ed elettromagnetiche rispetto ~~al~~ al riferimento ~~di~~ comune (piano di massa)

I conduttori vengono intrecciati (twisted pair) sia per
doppino ritorto
minimizzare i disturbi elettromagnetici indotti nel ricevitore RX da altre sorgenti di segnale, sia per fare in modo che i campi magnetici H_1 e H_2 generati dai due conduttori si neutralizzino reciprocamente (essendo opposte le correnti I_1 e I_2 i campi magnetici sono opposti in verso ed uguali in intensità



$$V_u = V_1 - V_2 = \frac{V_i}{2} + V_N - \left(-\frac{V_i}{2} + V_N\right) = \frac{V_i}{2} - \left(-\frac{V_i}{2}\right) = V_i$$

Un segnale di disturbo V_N influisce ugualmente sui 2 conduttori e non appare in uscita grazie all'ingresso differenziale del ricevitore.

L'impedenza caratteristica del doppino $Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}}$ dipende essenzialmente dalle caratteristiche elettriche dell'isolante (costante dielettrica) e dal raggio r e dalla distanza d dei conduttori.

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \ln \frac{d}{r}$$

induttanza per unità di lunghezza (in ~~Henry~~ H/m)
H/m

μ_0 (permeabilità magnetica del vuoto nel sistema internazionale) (MKSA)

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{7}$ H/m.

μ_r : permeabilità magnetica relativa del materiale isolante (PVC)

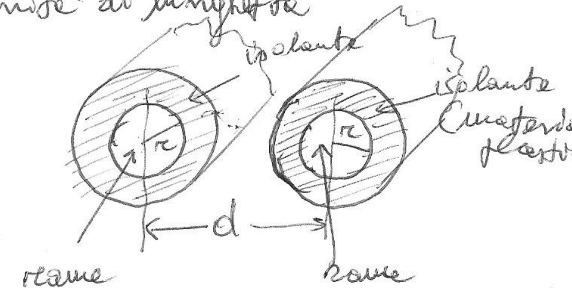
$\mu_r \simeq 1$

C : $\frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \frac{d}{r}}$

in Farad/metro
capacità per unità di lunghezza

ε_0 : costante dielettrica del vuoto nel sistema internazionale (MKSA)

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m



velocità di propagazione $V_f \simeq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 0,66c$
(velocità di fase)
(66% c)

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s
300000 Km/s
velocità della luce nel vuoto

Attenuazione :

TIPI DI DOPPINI

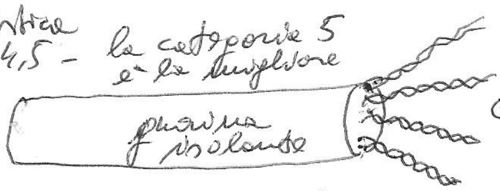
1) Doppino non schermato (UTP)

doppino non schermato
UTP
(Unshielded Twisted Pair)

$Z_0 = 100 \Omega$
impedenza caratteristica

categorie 3, 4, 5 - la categoria 5 è la migliore

può lavorare fino a 100 MHz (ed oltre)

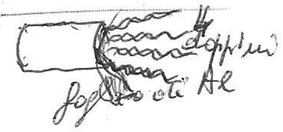


CAVO UTP a 4 coppie.

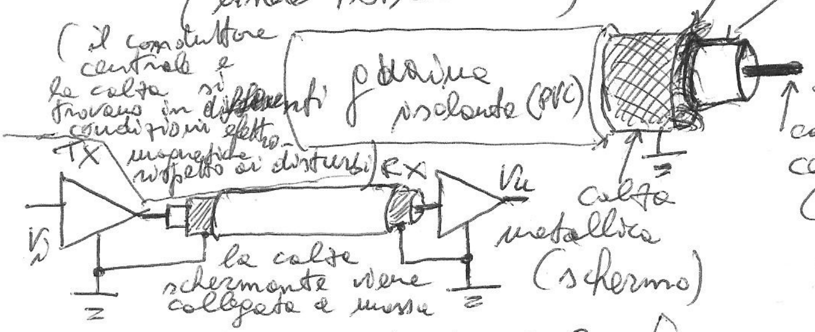
2) Doppino schermato (STP) (Shielded Twisted Pair)
(cavo IBM)
(per reti Token Ring)
"Tipo 1"

$Z_0 = 150 \Omega$ - attenuazione a 16 MHz: 4,5 dB per 100 metri di cavo

3) Doppino schermato (FTP) (Foiled Twisted Pair)
Foiled
Con un unico schermo in foglio di alluminio



B) Cavo coassiale (linea sbilanciata)



(il conduttore centrale e la calza si trovano in differenti condizioni elettromagnetiche rispetto ai disturbi)

la calza costituisce il conduttore per il ritorno della corrente e funge da riferimento di tensione e da schermo per il conduttore centrale.

$$C = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{r_2}{r_1}}}$$

capacità per unità di lunghezza (F/m)

È più immune ai disturbi elettromagnetici rispetto ai doppini non schermati

$$V_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \simeq 0{,}77c \quad (77\% c)$$

velocità di fase

$$L = \boxed{\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

induttanza per unità di lunghezza (H/m)

Tipi:

a) Coassialino (THIN COAX) (cavo per strumentazione elettronica (per le sonde degli oscilloscopi)) <u>Tipo RG58</u>

– impedenza caratteristica $Z_0 = 50\Omega$

Attenuazione riferita a 100 m di cavo
a 50 MHz: 11 dB
a 200 MHz: 24,5 dB
a 500 MHz: 40,5 dB

b) cavo coassiale televisivo – impedenza $Z_0 = 75\Omega$

N.B.: Nelle reti locali il cavo coassiale è stato quasi completamente sostituito dal doppino UTP ed STP

Attenuazione riferita a 100 m di cavo:
a 200 MHz: 9,5 dB
a 500 MHz: 14 dB
a 800 MHz: 20,5 dB

LINEE DI TRASMISSIONE
SCHEMI E FORMULE IMPORTANTI

Modello di una linea trasmissione
(modello a parametri distribuiti)

costanti primarie della linea: R, L, G, C ← capacità Kilometrica (nF/Km)

G ← conduttanza Kilometrica (μS/Km)

L ← induttanza Kilometrica (mH/Km)

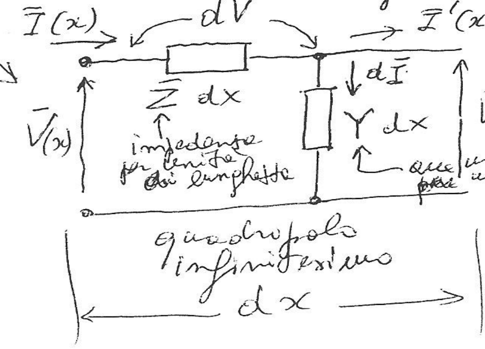
R ← resistenza Kilometrica Ω/Km

N.B.: Al crescere della frequenza R aumenta a causa dell'effetto pelliculare (skin effect)

$R(f) = 2{,}61 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{f}}{2\pi r}$ ← in Ω/cm per un tratto; r ← raggio del conduttore

per effetti pelliculari la corrente passa in superficie

1) Schema circuitale (differenziale) per un tratto di linea di lunghezza infinitesima dx



$\bar{I}'(x+dx) = \bar{I}(x) + d\bar{I}$

$\bar{V}'(x+dx) = \bar{V}(x) + d\bar{V}$

$$\begin{cases} \bar{Z} = R + j\omega L \\ \bar{Y} = G + j\omega C \end{cases}$$

caduta di tensione (infinitesima) $d\bar{V} = -\bar{Z}\,dx\,\bar{I}$

variazione di corrente (infinitesima) $d\bar{I} = -Y\,dx \cdot \bar{V}$

2) Costanti secondarie: $\bar{Z}_0$ (impedenza caratteristica) (complessa in generale)

γ (costante di propagazione) (complessa)

2a) $\xrightarrow{*}$ $\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{\bar{Z}}{\bar{Y}}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$ (Ω)

Se $R = 0$ e $G = 0$ $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

2b) $\longrightarrow *$ $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$

equazioni delle linee (dei telefonisti)

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{V}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \bar{V}(x) \\ \frac{d^2\bar{I}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \bar{I}(x) \end{cases}$$

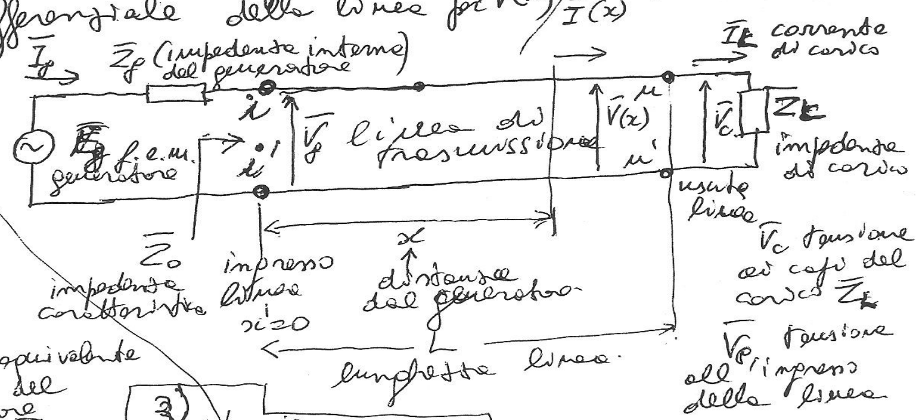
$\gamma = \alpha + j\beta$

α ← attenuazione (dB/Km)

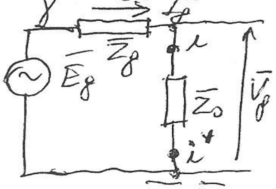
β ← costante di fase (rotazione di fase per unità di lunghezza) (rad/Km)

27

Soluzione (integrale generale) dell'equazione differenziale della linea per $\overline{V}(x)$



Circuito equivalente dal lato del generatore



$$\overline{V}_g = \frac{\overline{E}_g \overline{Z}_0}{\overline{Z}_0 + \overline{Z}_g}$$

3) *

$$\boxed{\frac{d^2\overline{V}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \, \overline{V}(x)}$$

I equazione differenziale dei telegrafisti (per $V(x)$)

$$Z_0 := \sqrt{\frac{\overline{Z}}{\overline{Y}}} \quad *$$

$$\gamma = \sqrt{\overline{Z} \cdot \overline{Y}} \quad *$$

(gamma)

* 4)

$$\overline{V}(x) = C_1 e^{-\gamma x} + C_2 e^{\gamma x}$$

← onda regressiva (o riflessa) di tensione

↑ onda progressiva (o diretta) di tensione

$$V(x) = \overline{V}_d e^{-\gamma x} + \overline{V}_r e^{\gamma x}$$

dipende da due costanti arbitrarie C_1 e C_2 determinate in funzione della tensione e della corrente in un particolare punto della linea (per esempio all'ingresso o all'uscita)

Se si considerano $\overline{I}_g$ e $\overline{V}_g$, corrente e tensione relative all'ingresso della linea, si ha:

$$C_1 = \overline{V}_d = \frac{(\overline{V}_g + \overline{I}_g Z_0)}{2} \quad , \quad C_2 = \overline{V}_r = \frac{(\overline{V}_g - \overline{I}_g Z_0)}{2}$$

ampiezza onda diretta

ampiezza onda riflessa

$C_2 = 0$ se la linea è adattata al carico $(Z_L = Z_0)$

Soluzione (integrale generale) dell'equazione differenziale:

5) * $$\frac{d^2\bar{I}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \bar{I}(x)$$

(II equazione differenziale dei telefonisti (per $\bar{I}(x)$))

$$\boxed{\bar{I}(x) = \bar{I}_d e^{-\gamma x} + \bar{I}_r e^{\gamma x}}$$

6) $$\bar{I}(x) = \frac{C_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma x} - \frac{C_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma x} = \frac{\bar{V}_d}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma x} - \frac{\bar{V}_r}{\bar{Z}_0} e^{\gamma x}$$

(progressiva) onda diretta di corrente

onda riflessa (regressiva) di corrente

$\bar{I}_d$ ampiezza onda diretta corrente

$\bar{I}_r$ ampiezza onda riflessa corrente

7) Coefficiente di riflessione per la tensione: * $\bar{\rho}_V = \frac{\bar{V}_r}{\bar{V}_d} = \frac{\text{ampiezza onda riflessa di tensione}}{\text{ampiezza onda diretta di tensione}}$

7a) * $\bar{\rho}_V = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0}$

8) Coefficiente di riflessione per la corrente: $\bar{\rho}_I = \frac{\bar{I}_r}{\bar{I}_d} = \frac{\text{ampiezza onda riflessa di corrente}}{\text{ampiezza onda diretta di corrente}}$

$$\bar{\rho}_I = \frac{-\bar{V}_r/\bar{Z}_0}{\bar{V}_d/\bar{Z}_0} = -\frac{\bar{V}_r}{\bar{V}_d} = -\bar{\rho}_V$$

8a) * $\bar{\rho}_I = -\frac{(\bar{Z}_L - \bar{Z}_0)}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0}$

9) Rapporto onde stazionarie: $ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{I_{max}}{I_{min}}$

o SWR (Standing Wave Ratio)

* $$ROS = \frac{1 + |\rho_V|}{1 - |\rho_V|}$$ ← modulo di $\bar{\rho}_V$

oppure $ROS = \frac{1 + |\bar{\rho}_I|}{1 - |\bar{\rho}_I|}$ ← modulo di $\bar{\rho}_I$

$1 \leq ROS \leq \infty$

1: regime progressivo con carico adattato alla linea. ($\bar{Z}_c = \bar{Z}_0$) non si formano onde stazionarie di tensione e di corrente

∞: disadattamento completo (regime stazionario) si hanno onde stazionarie di tensione e di corrente

ROS:
- 1 linea adattata al carico ($\rho_V = \rho_I = 0$) (regime progressivo)
- ∞ linea disadattata aperta o chiusa in cortocircuito. La tensione e la corrente vengono completamente riflesse verso il generatore. ($\rho_V = \rho_I = 1$) (riflessione totale)

Velocità di fase V_f e velocità di gruppo V_g

La velocità di fase V_f si ottiene sia calcolando l'inverso di τ_0 (ritardo per unità di lunghezza)

* $V_f = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ velocità di fase (m/s)

sia dividendo la velocità della luce nel vuoto ($C = 3 \cdot 10^8$ m/s) per $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

$V_f = \dfrac{C}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$ ε_r: costante dielettrica dell'isolante $\mu_r \simeq 1$

* $\tau_0 = \sqrt{LC}$ ritardo di fase per unità di lunghezza $\left(\dfrac{ms}{Km} \text{ o } \dfrac{\mu s}{m} \right)$

L: induttanza kilometrica (mH/Km)

C: capacità kilometrica (nF/Km)

In pratica, essendo circa unitaria la permeabilità magnetica relativa μ_r per i dielettrici, si ha: $V \simeq \dfrac{C}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ (PVC)

La velocità di fase V_f è la velocità con cui ci si deve spostare lungo la linea per osservare sempre lo stesso valore di tensione o di corrente (o, in particolare, un massimo di tensione o di corrente) $V(x_0, t_0)$ o $I(x_0, t_0)$ rilevato in punto x_0, all'istante t_0

In particolare, sia l'onda di tensione

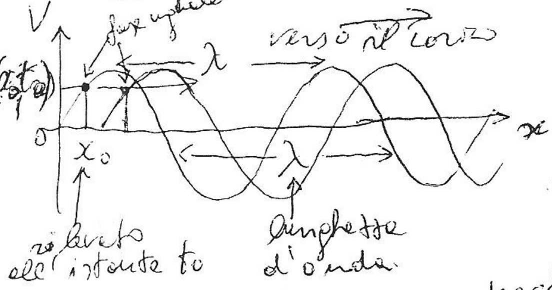
* $\bar{V}(x,t) = \bar{V}_g e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(\underbrace{\omega t - \overset{\text{costante di fase}}{\beta} x}_{\text{fase}})$

sia l'onda di corrente

* $\bar{I}(x,t) = \bar{I}_g e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(\underbrace{\omega t - \beta x}_{\text{fase}})$

V_g, I_g: tensione e corrente all'ingresso della linea

si propagano con una velocità V_f (di fase) che si ottiene considerando, per un segnale sinusoidale con pulsazione $\omega = 2\pi f$, la velocità V_f con cui si propaga un particolare valore di tensione (o di corrente) $V(x_0, t_0)$ (o $I(x_0, t_0)$), presente, in un certo istante t_0 ed in un punto di ascissa x_0, procedendo verso il carico.



Per $x = x_0$ e $t = t_0$ la fase dell'onda assume il valore $(\omega t_0 - \beta x_0)$. Quindi bisogna calcolare con quale velocità V_f si deve propagare il segnale perché la fase si mantenga uguale al valore inizialmente considerato $(\omega t_0 - \beta x_0)$.

$$\underbrace{\omega t_0 - \beta x_0}_{\text{fase iniziale (costante)}} = \omega t - \beta x$$

Differenziando si ha:

$$0 = \omega\, dt - \beta\, dx .$$

il differenziale di una costante è nullo

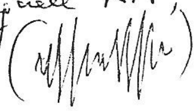
$$\omega\, dt = \beta\, dx$$

Pertanto la velocità di fase V è pari a

$$V_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\cancel{2\pi} f}{\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}} = f \cdot \lambda$$

derivata di x rispetto al tempo

$$\boxed{* \quad \text{Velocità di fase } V_f = \frac{\omega}{\beta}}$$

Se, invece di una segnale sinusoidale, nella linea si propaga un segnale costituito da diverse componenti armoniche (sinusoidali), per esempio l'inviluppo di modulazione di un segnale AM, () (oppure l'insieme di 2 o più segnali sinusoidali con frequenze vicine), si definisce velocità di gruppo V_g la derivata della pulsazione ω rispetto alla costante di fase β. V_g è la velocità con cui si propaga lungo la linea l'energia del segnale.

$$* \quad \boxed{V_g = \frac{d\omega}{d\beta}} .$$

velocità di gruppo

l'inverso di V_g è il ritardo di gruppo per unità di lunghezza

$$\left(\underset{(\mu s/m)}{\tau_g} = \frac{1}{V_g} \right) \quad \tau_g = \frac{d\beta}{d\omega}$$

Generalmente la velocità di gruppo V_g è diversa dalla velocità di fase, in quanto, nelle linee reali β non è proporzionale a ω. ($\beta \neq \omega\sqrt{LC}$)

Soltanto se la linea è non dispersiva (o autodistorcente), o addirittura senza perdite ($R = 0$, $G = 0$), $V_g = V_f$

$R/L = G/C$ (condizione di Heaviside)

Infatti, soltanto se $\beta = \omega\sqrt{LC}$ (proporzionale a ω)

$$\omega = \frac{\beta}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$V_g = \frac{d\omega}{d\beta} \equiv 1/\sqrt{LC}$$

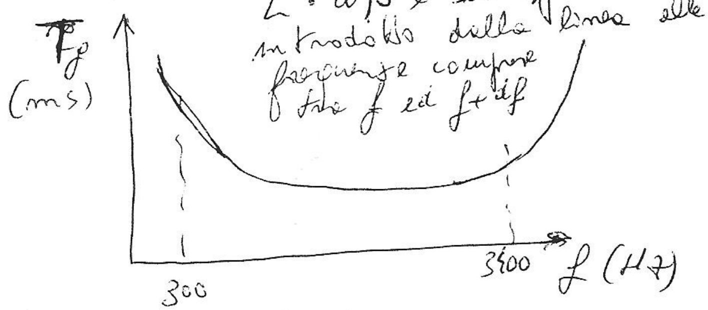
e $V_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ coincidono.

Per ottenere, in particolare, il ritardo di gruppo relativo ad una linea di lunghezza L, bisogna moltiplicare il ritardo di gruppo τ_g per unità di lunghezza per la lunghezza della linea:

$$* \quad T_g = L \cdot \tau_g = L \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{L}{2\pi} \frac{d\beta}{df}$$

(in ms)

$L \cdot d\beta$ è ~~lo~~ sfasamento $d\varphi$ introdotto dalla linea alle frequenze comprese tra f ed $f + df$



Misura: Si rilevano i ritardi di gruppo dai segnali sinusoidali alle diverse frequenze e si traccia l'andamento di $T_g(f)$ per un ~~dato~~ ~~[illegible]~~ trasmissivo (cavo coassiale, doppino).

Prof. Antongino Ciumotte a.s. 99/2000

Calcolo delle costanti di attenuazione (α) (dB/Km) e di fase (β) (rad./Km)

costante di propagazione (costante secondaria) $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}} \quad *$$

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}} \quad *$$

impedenza caratteristica (Ω) (costante secondaria)

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta$$

$$\gamma^2 = (R+j\omega L)(G+j\omega C) = RG + j\omega LG + j\omega RC - \omega^2 LC$$

Confrontando termine a termine, si ha:

confronto parti reali: $\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC$

confronto parti immaginarie: $2\alpha\beta = \omega LG + \omega RC$

$$\alpha = \frac{\omega(LG+RC)}{2\beta}$$

$$\frac{\omega^2(LG+RC)^2}{4\beta^2} - \beta^2 = RG - \omega^2 LC$$

$$\omega^2(LG+RC)^2 = 4\beta^2 RG - 4\omega^2\beta^2 LC + 4\beta^4$$

$$4\beta^4 + 4(RG - \omega^2 LC)\beta^2 - \omega^2(LG+RC)^2 = 0$$

$$\beta^2 = \frac{-4(RG-\omega^2 LC) \pm \sqrt{16(RG-\omega^2 LC)^2 + 16\omega^2(LG+RC)^2}}{8}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\begin{pmatrix} R^2G^2 + \omega^4 L^2C^2 - \cancel{2\omega^2 RLGC} + \\ + \omega^2 L^2G^2 + \omega^2 R^2C^2 + \cancel{2\omega^2 LGRC} \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) \pm \frac{1}{2}\sqrt{R^2(G^2+\omega^2C^2) + \omega^2L^2(G^2+\omega^2C^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(G^2+\omega^2C^2)(R^2+\omega^2L^2)}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(G^2+\omega^2C^2)(R^2+\omega^2L^2)}}$$

non si considera il segno meno, dovendo essere β reale

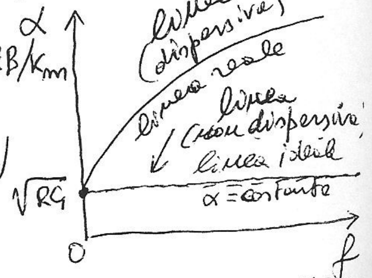
$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC$$

$$\alpha^2 - \frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(G^2+\omega^2C^2)(R^2+\omega^2L^2)} = RG - \omega^2 LC$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(RG - \omega^2 LC) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(G^2+\omega^2C^2)(R^2+\omega^2L^2)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(RG - \omega^2 LC) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(G^2+\omega^2C^2)(R^2+\omega^2L^2)}}$$

α (per $\omega = 0$) $= \sqrt{RG}$



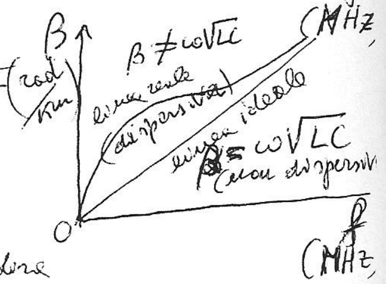
Casi particolari:

1) Linea non dissipativa (senza perdite)

$R = 0 \qquad G = 0$

$L \neq 0 \qquad C \neq 0$

(In pratica se $R \ll \omega L$ e $G \ll \omega C$)



$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(\cancel{RG} - \omega^2 LC) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\cancel{G^2}+\omega^2C^2)(\cancel{R^2}+\omega^2L^2)}} =$$

$$= \sqrt{-\frac{\omega^2 LC}{2} \pm \frac{\omega^2 LC}{2}} = 0$$

N.B.: non si considera il segno meno, dovendo essere α reale.

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 LC - \cancel{RG}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\cancel{G^2}+\omega^2C^2)(\cancel{R^2}+\omega^2L^2)}} = \sqrt{\frac{1}{2}\omega^2 LC \pm \frac{1}{2}\omega^2 LC}$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 LC} = \omega\sqrt{LC} = 2\pi f\sqrt{LC}$$

$\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ | $v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda f$ (v ← velocità di fase)

la costante di fase è direttamente proporzionale alla frequenza

Il segnale non subisce attenuazione ($\alpha = 0$) nè distorsione e si propaga con un ritardo $\tau_0 = \sqrt{LC}$, per unità di lunghezza, (ms/Km o μs/m), indipendente dalla frequenza (dalla pulsazione ω).

La velocità costante v_f (di fase) è indipendente da f. $\tau_0 = \sqrt{LC} = \dfrac{\beta}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\lambda\omega} = \dfrac{2\pi}{\lambda \cdot 2\pi f} = \dfrac{1}{v}$

2) Linea non dispersiva (condizione di Heaviside)

Se $$\boxed{\frac{R}{L}=\frac{G}{C}}$$ si ha, ✱

In particolare, se $R=0$ e $G=0$ si ha la linea non dissipativa (senza perdite)

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(RG-\omega^2LC\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(G^2+\omega^2C^2\right)\left(R^2+\omega^2L^2\right)}}=$$

$$\left(G=\frac{RC}{L}\right.\quad \text{oppure}\quad R=\frac{GL}{C}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{R^2C}{L}-\omega^2LC\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R^2C^2}{L^2}+\omega^2C^2\right)\left(R^2+\omega^2L^2\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{R^2C}{L}-\omega^2LC\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C^2\left(R^2+\omega^2L^2\right)\left(R^2+\omega^2L^2\right)}{L^2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\left(R^2-\omega^2L^2\right)C}{L}+\frac{1}{2}\frac{C}{L}\left(R^2+\omega^2L^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{R^2C}{2L}-\cancel{\frac{\omega^2LC}{2}}+\frac{R^2C}{2L}+\cancel{\frac{\omega^2LC}{2}}}=\sqrt{\frac{R^2C}{L}}=$$

$$\boxed{\alpha=R\sqrt{\frac{C}{L}}}\qquad =R\sqrt{\frac{C}{L}}=\frac{GL}{C}\sqrt{\frac{C}{L}}=G\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\beta=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\omega^2LC-\frac{R^2C}{L}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R^2C^2}{L^2}+\omega^2C^2\right)\left(R^2+\omega^2L^2\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\left(-R^2+\omega^2L^2\right)C}{L}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C^2\left(R^2+\omega^2L^2\right)}{L^2}\left(R^2+\omega^2L^2\right)}}=$$

$$=\sqrt{-\cancel{\frac{R^2}{2L}}+\frac{\omega^2LC}{2}+\cancel{\frac{R^2C}{2L}}+\frac{\omega^2LC}{2}}=\sqrt{\omega^2LC}=\omega\sqrt{LC}\quad ✱$$

$$\boxed{\beta=\omega\sqrt{LC}}$$

Riepilogo sull'adattamento fra linea e carico

Si fa l'ipotesi che il generatore $\overline{E}_g$ abbia un'impedenza interna $\overline{Z}_g = \overline{Z}_0$ (impedenza caratteristica della linea).

In queste condizioni il generatore è adattato alla linea (adattamento all'ingresso), e pertanto non si hanno riflessioni multiple di impedenza (dal carico verso il generatore) rifl. e (dal generatore verso il carico) rifl.

Si suppone, per semplicità, che il carico $\overline{Z}_L$

$Z_L = R_L + jX_L$ sia resistivo (reattanza X_L nulla) $X_L = 0$

$(\overline{Z}_L = R_L)$ e che l'impedenza caratteristica della linea sia resistiva

$Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (resistenza caratteristica)

(se $R \ll \omega L$ e $G \ll \omega C$)

I caso: Se $Z_L = R_L = Z_0$

impod. carico = all'impod. caratt.

la linea è adattata al carico (regime progressivo), e si hanno soltanto onde progressive di tensione e di corrente che vanno verso il carico.

La potenza è assorbita completamente dal carico.

$$P = V_d I_d - \cancel{V_r I_r} = V_d I_d$$

P: ceduta dalla linea al carico R_L

$V_d I_d$: potenza ~~diretta~~

$V_r I_r$: è nulla la potenza riflessa dal carico verso il generatore.

$V_r I_r = 0$

V_r: tensione riflessa (valore efficace)

I_r: tensione riflessa (valore efficace)

$\rho_V = \rho_I = 0$

$$ROS = \frac{1 + \rho_V}{1 - \rho_V} = 1$$

La linea funziona come se fosse infinitamente lunga. (Se una linea è lunghissima l'onda riflessa si annulla) impod. carico > imped. caratteristica linea

14

II Caso: Se $R_L > Z_0$, la linea è disadattata (regime stazionario con riflessione parziale) e si hanno ~~[illegible]~~ onde riflesse di tensione e di corrente che, propagandosi verso il generatore, interagiscono con le onde dirette di tensione e di corrente provenienti dal generatore, dando luogo ad onde stazionarie di tensione e di corrente, con massimi e minimi distanziati di $\frac{\lambda}{4}$

(V_{max}, I_{max}) (ventri)

(V_{min}, I_{min}) (nodi)

$\rho_V = \frac{V_r}{V_d}$

$$\rho_V = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} > 0$$

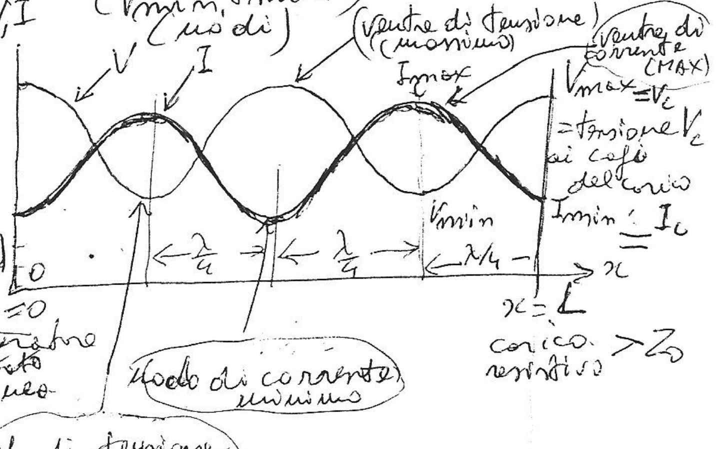
$\rho_I = -\rho_V$

(Se $\rho_V > 0$ si ha un massimo di tensione all'uscita)

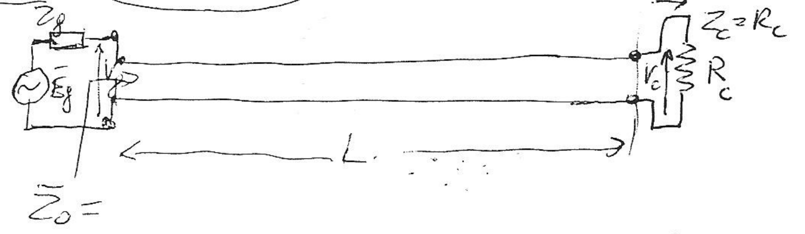
l'onda riflessa di tensione V_r è in fase con V_d

N. B.: La potenza trasmessa al carico dalla generatore attraverso alla linea è costante in ogni punto:

$$P_c = V_{max} I_{min} = V_{min} I_{max}$$



il ROS è maggiore di 1 poiché ρ_V e ρ_I sono diversi da zero



Non tutta la potenza immessa nella linea viene ceduta al carico: $P_c = V_d I_d - V_r I_r = V_{max} I_{min} = V_{min} I_{max}$

P_c ceduta al carico

$V_d I_d$ ↑ potenza diretta (onda progressiva)

$V_r I_r$ ↑ potenza riflessa (onda regressiva)

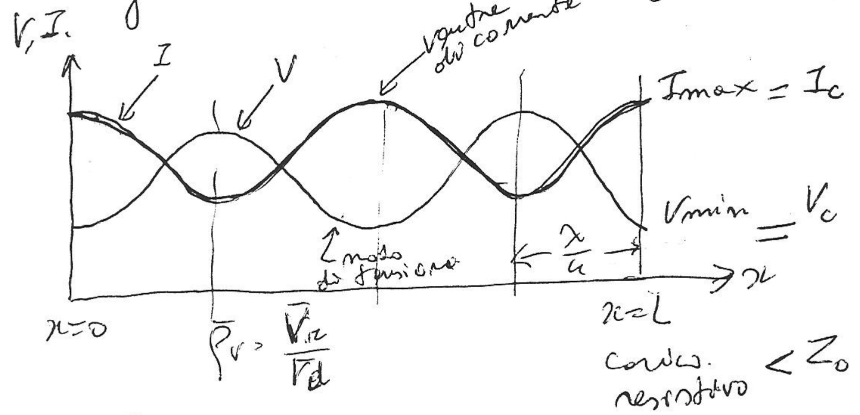
$I_{min} = I_c$

$$\boxed{V_{max} = V_c}$$

III Caso ~~Impd.~~ carico < Impedenza caratteristica

$\underline{R_L < Z_0}$, la linea è disadattata

(regime stazionario con riflessione parziale)



$$\bar{\rho}_V = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} < 0$$ il ROS è maggiore di 1

$$\bar{\rho}_I = -\bar{\rho}_V$$

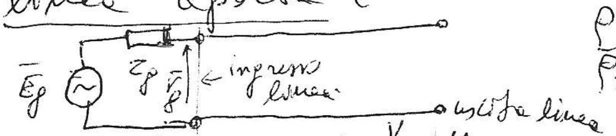
Se $\rho_V < 0$, si ha un minimo di tensione all'uscita (ed un massimo di corrente uguale a Ic.

L'onda riflessa di tensione $\bar{V}_r$ è sfasata di 180° rispetto all'onda diretta di tensione V_d

$$P_c = V_d I_d - V_r I_r = V_{max} I_{min} = V_{min} I_{max}$$

potenza ceduta al carico

IV Caso linea aperta (a vuoto) $I_c = 0$



$\bar{\rho}_V = 1$

$\bar{\rho}_I = -1$

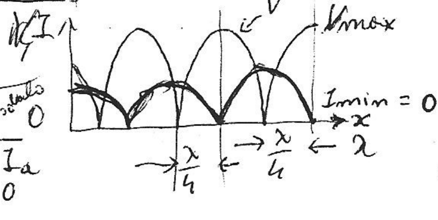
$ROS = \frac{1+1}{1-1}$

$ROS = \infty$

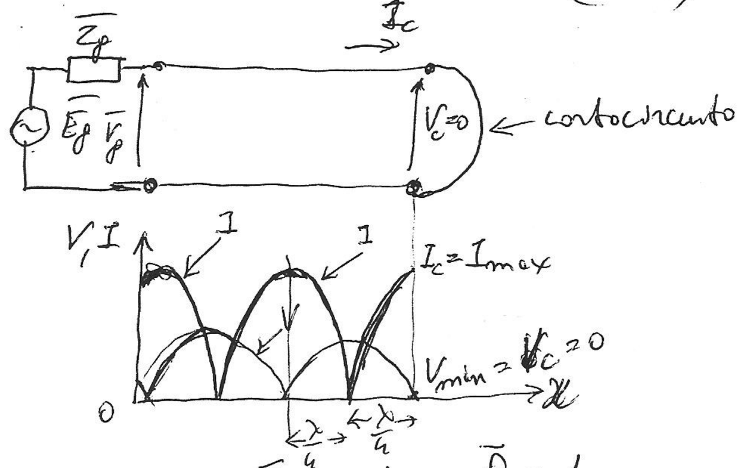
riflessione totale di tensione e di corrente.

Poiché all'uscita della linea V=Vmax, la tensione riflessa $\bar{V}_r$ è uguale alla tensione diretta $\bar{V}_d$ ed è in fase con essa. Essendo invece $I_c \equiv 0$, la corrente riflessa $\bar{I}_r$ è uguale in modulo $\bar{0}$ ed in opposizione di fase con $\bar{I}_d$

$I_c = I_d + I_r = 0$



V Caso linea in cortocircuito ($V_c = 0$)



$\bar{\rho}_V = -1$, $\bar{\rho}_I = 1$

$$ROS = \frac{1+1}{1-1} = \infty$$

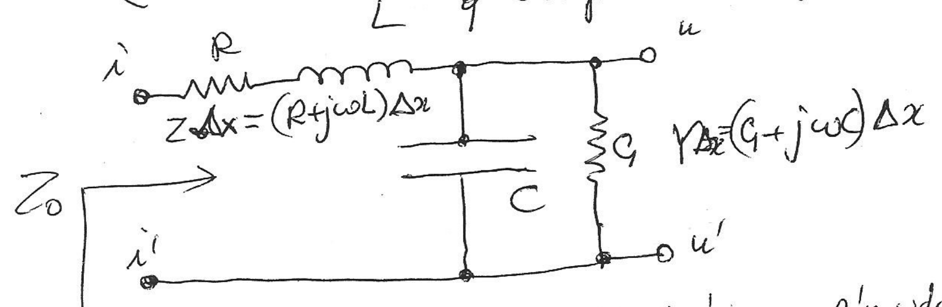
Riflessione totale di tensione e di corrente

Poiché all'uscita della linea $I = I_{max}$, la corrente riflessa I_r è uguale alla corrente diretta $\bar{I}_d$ ed è in fase con essa.

Essendo invece $V_c = 0$, la tensione riflessa è uguale in modulo ed in opposizione di fase con la tensione diretta.

Calcolo dell' impedenza caratteristica Z_0 con la formula $Z_0 = \sqrt{Z_{ca} Z_{cc}}$

← Δx → quadripolo di lunghezza Δx

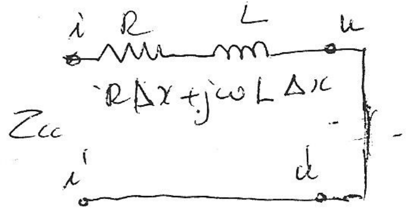


Z_{ca} : impedenza vista da (i, i') con l'uscita (u, u') a vuoto (circuito d'uscita aperto)

Z_{cc} : impedenza vista da (i, i') con l'uscita in (u, u') cortocircuito

$$Z_{cc} = (R + j\omega L)\Delta x \; ; \quad Z_{ca} = (R+j\omega L)\Delta x + \frac{1}{Y \cdot \Delta x} =$$

$$= (R+j\omega L)\Delta x + \frac{1}{(G+j\omega C)\Delta x}$$



$$Z_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{\left[(R + j\omega L)\Delta x + \frac{1}{(G+j\omega C)\Delta x}\right](R+j\omega L)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{(R+j\omega L)^2 \cancel{(\Delta x)^2} + \frac{(R+j\omega L)\cancel{\Delta x}}{(G+j\omega C)\cancel{\Delta x}}}$$

Facendo tendere Δx a zero, si ha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$