

•

Strumenti per l'analisi dei segnali nel dominio della frequenza Analizzatori di spettro



Indice

- [Materiale didattico](#)
 1. [L'analisi dei segnali nel dominio della frequenza](#)
 - Lo sviluppo dei segnali periodici in serie di Fourier
 - Lo spettro di ampiezza dei segnali
 2. [Gli analizzatori di spettro](#)
 - La classificazione degli analizzatori di spettro
 3. [Analizzatori analogici in tempo reale](#)
 - Analizzatore a filtri multipli
 4. [Analizzatori analogici a scansione](#)
 - Analizzatore a filtro accordato
 - Analizzatore a supereterodina
 - Analizzatore d'onda
 5. [Analizzatori numerici a FFT](#)
 - Il teorema del campionamento
 - Analizzatore a FFT
 - Il Leakage
 - La risoluzione in frequenza
 - Le tecniche di averaging e overlapping
 6. [Conclusioni](#)
- [Quesiti di ricapitolazione](#)
- [Domande d'esame \(AA 1998/99\) sull'argomento](#)

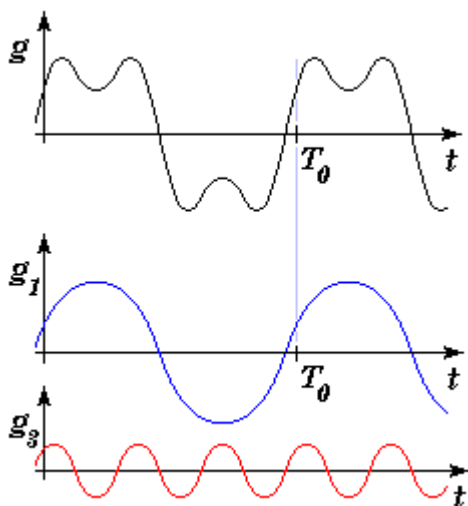
- [Fotografie, disegni, link ed altro materiale fuori testo](#)
- [Bibliografia consigliata per approfondimenti](#)

E' vietata ogni riproduzione a fini di lucro del materiale distribuito da questo Server WWW

1 - L'analisi dei segnali nel dominio della frequenza

Lo sviluppo dei segnali periodici in serie di Fourier

Un segnale periodico (di periodo T_0) può essere scomposto nella somma di infiniti segnali sinusoidali aventi frequenze i cui valori sono multipli (interi) di $1/T_0$: tale scomposizione viene chiamata "sviluppo in serie di Fourier". La sinusoide avente frequenza $f_0 = 1/T_0$ (e quindi periodo uguale a T_0) viene chiamata "fondamentale" e gli altri segnali sinusoidali che fanno parte dello sviluppo sono chiamati "armoniche".



Sotto l'aspetto matematico si ha:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

I valori dei coefficienti che compaiono nello sviluppo in serie di Fourier (quindi le ampiezze della fondamentale e delle armoniche), si ricavano da:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

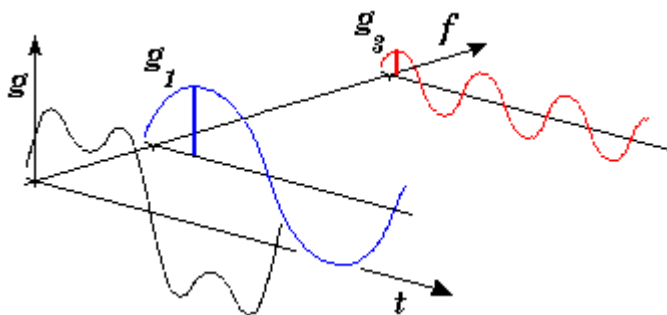
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Da questa espressione generale possiamo ricavare una forma più utile per introdurre quella forma di analisi dei segnali conosciuta come "analisi nel dominio della frequenza".

$$g(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)]$$

Il coefficiente c_0 è numericamente uguale al valore medio di $g(t)$ nel periodo e può essere determinato con i metodi convenzionali; la misurazione della ampiezza c_1 della fondamentale e delle ampiezze e fasi delle armoniche costituisce la "analisi armonica" (o analisi nel dominio della frequenza) del segnale incognito. Questa misurazione può essere effettuata mediante gli "analizzatori di spettro" (in alcuni casi gli strumenti non sono in grado di determinare le fasi delle armoniche).

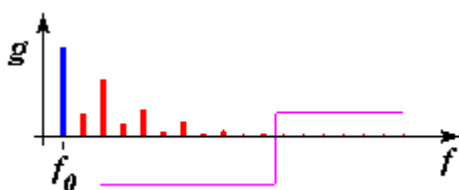
Volendo dare una rappresentazione grafica dell'analisi nel dominio del tempo e di quella nel dominio della frequenza si può immaginare di osservare da due punti di vista ortogonali il grafico sotto riportato:



Nel piano g, t si vede la forma d'onda del segnale e delle onde sinusoidali in cui esso viene scomposto, nel piano g, f si vede lo "spettro di ampiezza" del segnale.

Lo spettro di ampiezza di un segnale periodico

Lo spettro di ampiezza di un segnale periodico è costituito da un grafico a "righe" in cui, ad intervalli regolari, sono riportati dei segmenti verticali la cui lunghezza rappresenta la ampiezza delle armoniche corrispondenti. Esaminando le formule che descrivono matematicamente lo sviluppo in serie di Fourier si comprende che lo spettro è non limitato nella frequenza, ma sotto l'aspetto pratico si considera che lo spettro sia limitato in modo da contenere le sole armoniche dotate di ampiezza non trascurabile.



Vedremo che questa limitazione risulta indispensabile quanto si desidera compiere la misurazione dello spettro del segnale.

2 - Gli analizzatori di spettro

Classificazione degli analizzatori di spettro

Gli analizzatori di spettro si possono suddividere innanzitutto in "analizzatori analogici" e "analizzatori numerici"; a loro volta gli analizzatori analogici possono essere ulteriormente suddivisi in "analizzatori a tempo reale" e "analizzatori a scansione".

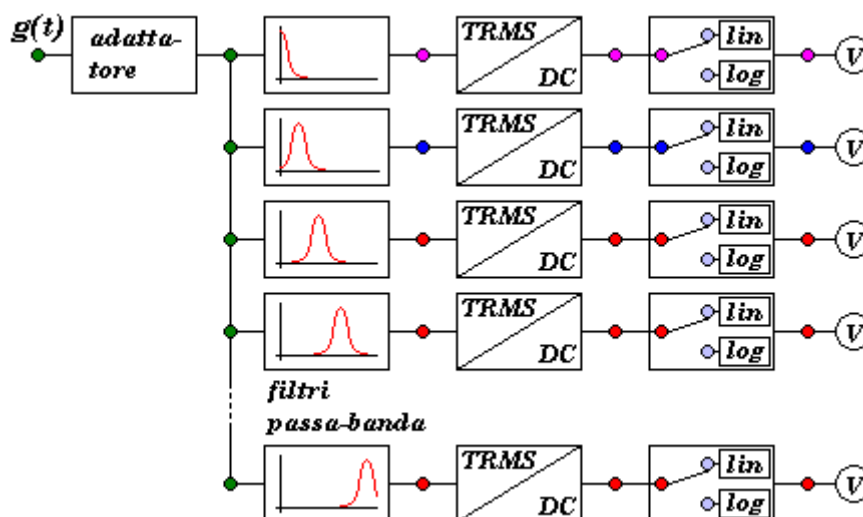
- **Analizzatori di spettro analogici**
 - Analizzatori a tempo reale
 - "a filtri multipli"
 - Analizzatori a scansione
 - a filtro selettivo accordabile
 - a filtro selettivo a freq. fissa e circuito supereterodina
- **Analizzatori numerici**

Gli analizzatori analogici permettono di valutare l'ampiezza delle componenti spettrali, ma non la loro fase nei confronti della fondamentale. Gli analizzatori numerici, invece, permettono di individuare anche la fase.

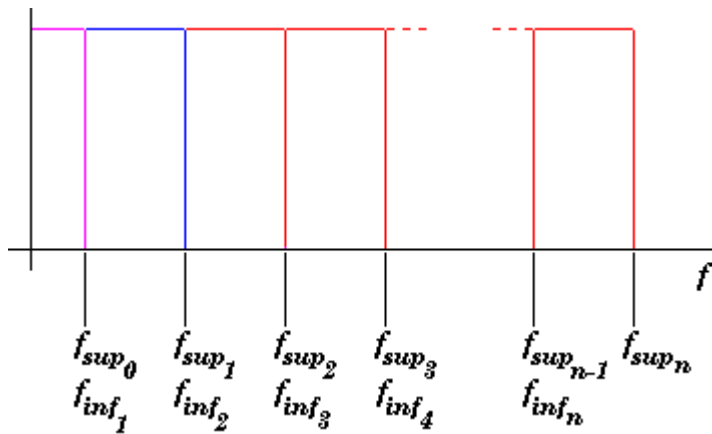
3 - Analizzatori analogici in tempo reale

Gli analizzatori in tempo reale misurano contemporaneamente le ampiezze di tutte le componenti spettrali e sono dotati di risposta rapida, tanto da poter essere considerata come rappresentativa della evoluzione dello spettro. Essi sono pertanto indicati in tutti quei casi in cui la forma d'onda del segnale non si mantiene costante nel tempo, ma evolve rapidamente (segnali audio e segnali da essi derivati, ecc.). Fra gli analizzatori in tempo reale possiamo esaminare quello "a filtri multipli".

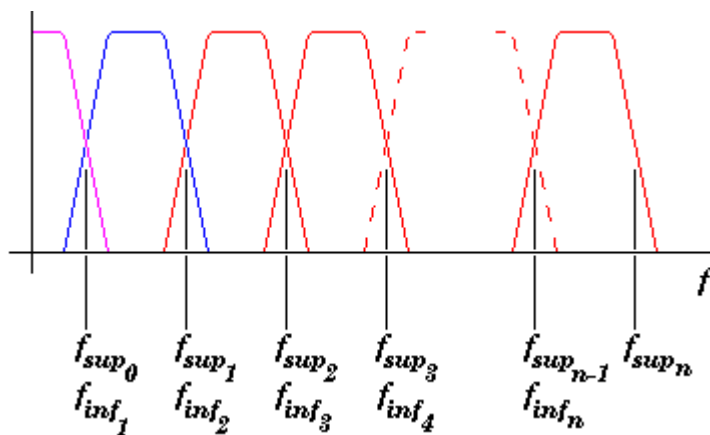
Analizzatore di spettro a filtri multipli



Lo schema mostra come questo tipo di analizzatore utilizzi una schiera di filtri "passa banda" aventi banda contigua: sotto l'aspetto teorico i filtri dovrebbero avere guadagno unitario (o costante) entro la banda e nullo immediatamente fuori da essa pertanto la risposta in frequenza della schiera di filtri risulterebbe la seguente.

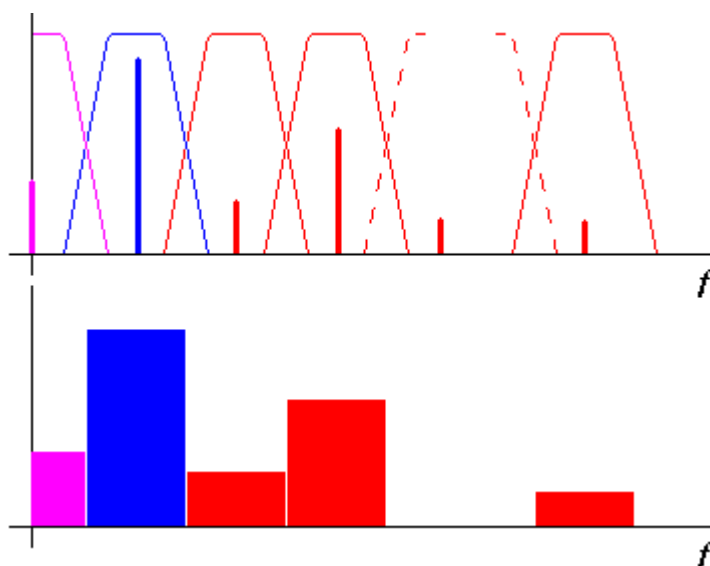


E' evidente che una tale situazione non è circuitalmente realizzabile pertanto si ripiega su filtri dotati di risposta in frequenza "reale":

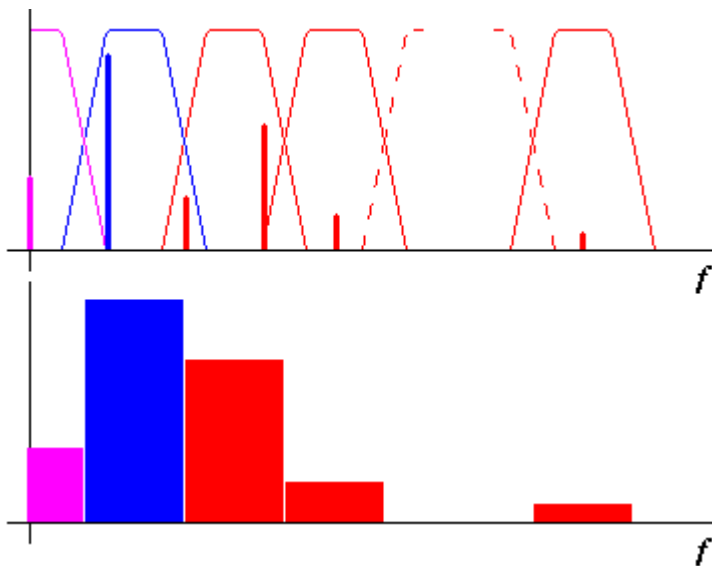


Ciascun "canale" del circuito dello strumento è poi completato da un convertitore TRMS/DC (o RMS/DC volendo conseguire un risparmio economico ed un possibile aumento degli estremi del campo di frequenze analizzabili), un amplificatore (con funzione lineare o logaritmica selezionabile per migliorare la leggibilità dei valori più bassi) ed un dispositivo di misurazione della tensione continua che è stata associata al valore efficace delle componenti spettrali.

Per il corretto funzionamento è necessario che ogni componente spettrale venga isolata da un filtro come avviene nel seguente esempio:



Quando ciò non avviene e due o più armoniche ricadono entro la banda dello stesso filtro si ha una distorsione dello spettro rilevato da imputare alla insufficiente risoluzione spettrale dello strumento rispetto al segnale sotto misura:



Per questa limitazione intrinseca (non è possibile pensare di aumentare a piacere il numero di canali di cui dispone lo strumento) gli analizzatori a filtri multipli sono stati relegati a compiti di modesta qualità lasciando agli analizzatori a scansione il compito di effettuare le misurazioni di precisione.

4 - Analizzatori analogici a scansione

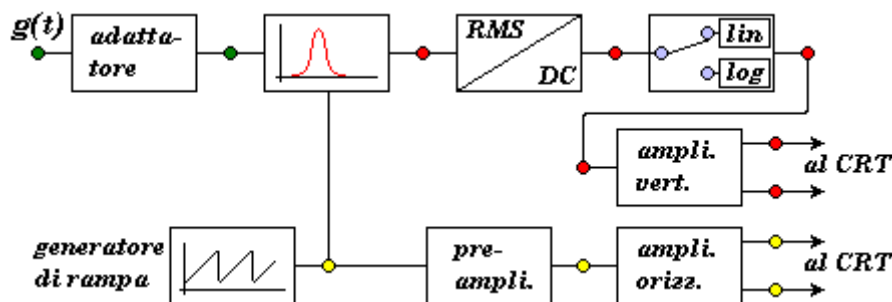
Negli analizzatori a scansione un solo filtro selettivo viene utilizzato per separare, in successione, una armonica in modo da misurarne l'ampiezza o il valore efficace. Passando in rassegna, una dopo l'altra, tutte le armoniche è possibile ottenere lo spettro del segnale. E' condizione indispensabile che lo spettro del segnale (e quindi anche la sua forma d'onda) si mantenga costante per tutto il tempo necessario a completare la scansione.

Per introdurre il principio di funzionamento si può fare ricorso all'analizzatore a filtro selettivo accordabile anche se, come vedremo, questo strumento presenta notevoli inconvenienti che hanno determinato il suo abbandono a favore del modello a filtro accordato con circuito a supereterodina.

Analizzatore di spettro a filtro selettivo accordabile

I componenti principali dello schema sono il filtro selettivo, la cui frequenza di centro banda può essere variata per mezzo della tensione applicata ad un ingresso di controllo, ed il circuito rivelatore dell'ampiezza del segnale in uscita dal filtro. Il dispositivo di visualizzazione è costituito da un tubo a raggi catodici (CRT) analogo a quello dell'oscilloscopio.

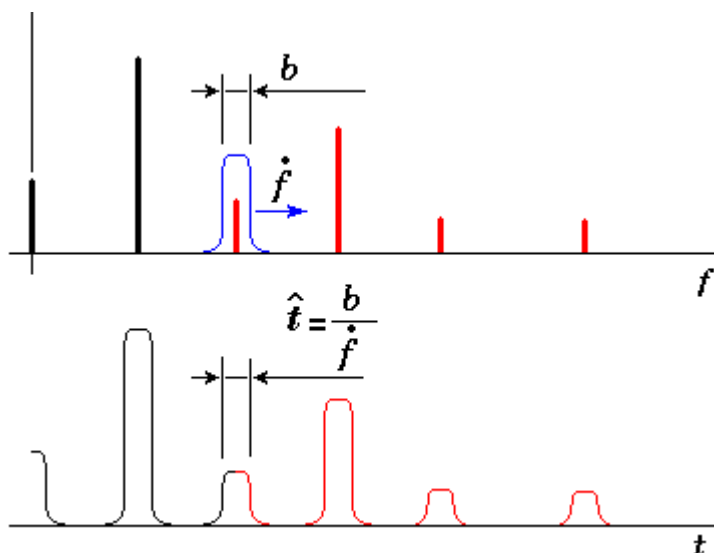
Un generatore di rampa provvede a pilotare il filtro selettivo in maniera da portarlo a "spazzolare" lo spettro del segnale esaminando, in successione, le componenti presenti.



Contemporaneamente la rampa provvede a pilotare anche la deflessione orizzontale del CRT in modo che sullo schermo compaia la traccia dello spettro con le frequenze in ascissa e le ampiezze delle armoniche sulle ordinate.

Disponendo di un filtro sufficientemente selettivo è possibile eseguire misurazioni anche per segnali in bassa frequenza ove le armoniche sono separate da pochi hertz...

Il problema di fondo degli strumenti a scansione è, come anticipato, dovuto alla necessità di disporre di segnali stazionari per tutto il tempo corrispondente ad una scansione dello spettro. Questo tempo non può essere ridotto a piacimento perché vincolato dalla velocità di risposta del circuito RMS/DC che deve raggiungere la condizione di regime nel tempo in cui ogni singola armonica si trova nella banda passante del filtro.



Se indichiamo con " f punto" la velocità con cui viene spostata la frequenza di centro banda del filtro e con b l'ampiezza della banda passante del filtro selettivo si ricava che ciascuna armonica permane entro la banda selezionata per un tempo pari a:

$$\hat{t} = \frac{b}{f}$$

Questo tempo deve essere maggiore di quello richiesto dal circuito rivelatore per arrivare a regime (t_R) pertanto viene imposto un limite minimo al rapporto "banda passante / velocità di scansione".

La scansione della intera banda B sotto analisi richiede quindi un tempo T_s :

$$T_s = \frac{B}{f} \geq \frac{B}{b} t_R$$

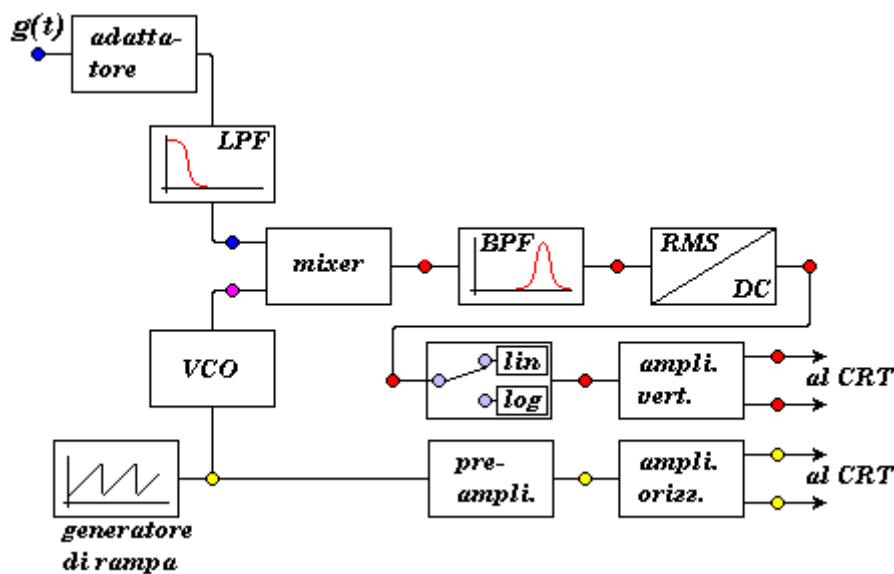
Come si vede, a parità di banda esaminata, l'aumento della risoluzione spettrale attuabile mediante il restringimento della banda passante del filtro richiede un aumento del tempo necessario per la scansione.

I principali problemi dell'analizzatore a filtro selettivo accordabile risiedono nella difficoltà di realizzazione di un filtro sufficientemente selettivo a frequenza di centro banda variabile e nella necessità di disporre di circuiti a valle di esso dotati di comportamento indipendente dalla frequenza.

Per superare queste difficoltà si sono sviluppati i circuiti "supereterodina".

Analizzatore di spettro a filtro selettivo con circuito supereterodina

Lo schema di principio è il seguente:



Rispetto all'analizzatore a selettivo filtro accordabile è stato sostituito il filtro passa banda accordabile con un filtro passa banda a frequenza di centro-banda fissa (*BPF*) e sono stati introdotti il mixer (circuito non lineare che permette di ottenere il prodotto di modulazione di due segnali), il VCO (oscillatore sinusoidale la cui frequenza di oscillazione è controllata da una tensione) ed un filtro passa-basso che limita la banda del segnale analizzabile (*LPF*).

Il principio su cui si basa questo strumento è quello dello spostamento in frequenza delle componenti spettrali risultanti dalla modulazione in ampiezza operata dal segnale nei confronti di un'onda sinusoidale che viene a fungere da portante.

Dato che

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

consideriamo inizialmente due segnali

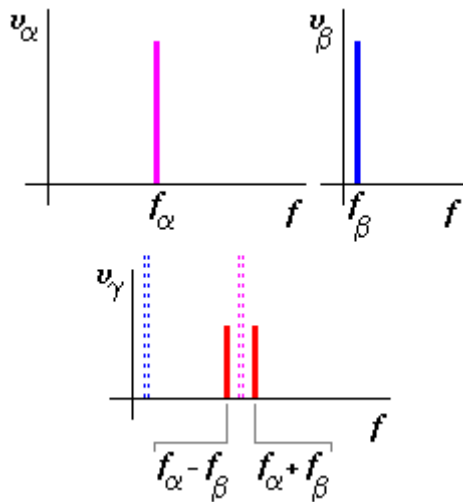
$$v_{\alpha}(t) = \cos(2\pi f_{\alpha} t)$$

$$v_{\beta}(t) = \cos(2\pi f_{\beta} t - \varphi)$$

ed usiamo il secondo per modulare in ampiezza il primo ottenendo un segnale:

$$v_{\gamma}(t) = v_{\alpha}(t) \cdot v_{\beta}(t) = \frac{1}{2} \cos [2\pi(f_{\alpha} + f_{\beta})t - \varphi] + \\ + \frac{1}{2} \cos [2\pi(f_{\alpha} - f_{\beta})t + \varphi] +$$

Ricordiamo che al prodotto fra i valori istantanei nel tempo corrisponde il prodotto di convoluzione nel dominio della frequenza ed esaminiamo lo spettro dei tre segnali:



Vediamo quindi facilmente che l'effetto della modulazione operata dal segnale determina la replica del suo spettro (dimezzato per quanto riguarda l'ampiezza) in modo simmetrico alla riga spettrale della portante.

Se ora consideriamo i due segnali:

$$v_{\alpha}(t) = 2 \cos (2\pi f_{\alpha} t) \\ v_{\beta}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos (2\pi n f_{0\beta} t - \varphi_n)$$

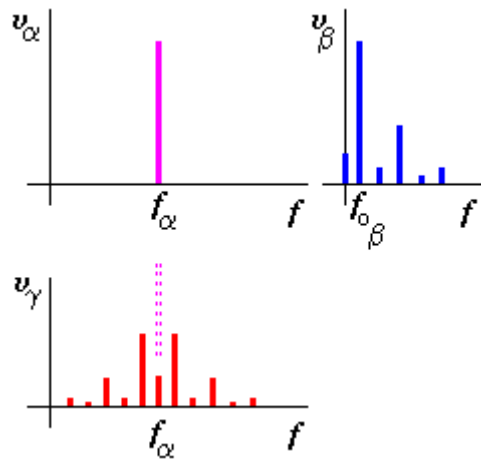
di cui il primo funge da portante ed il secondo ha la forma dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico, il loro prodotto si esprime come:

$$v_{\alpha}(t) \cdot v_{\beta}(t) = \frac{a_0}{2} 2 \cos (2\pi f_{\alpha} t) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2 c_n \cos [2\pi(f_{\alpha} + n f_{0\beta})t - \varphi_n] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2 c_n \cos [2\pi(f_{\alpha} - n f_{0\beta})t + \varphi_n]$$

da cui, semplificando ove possibile:

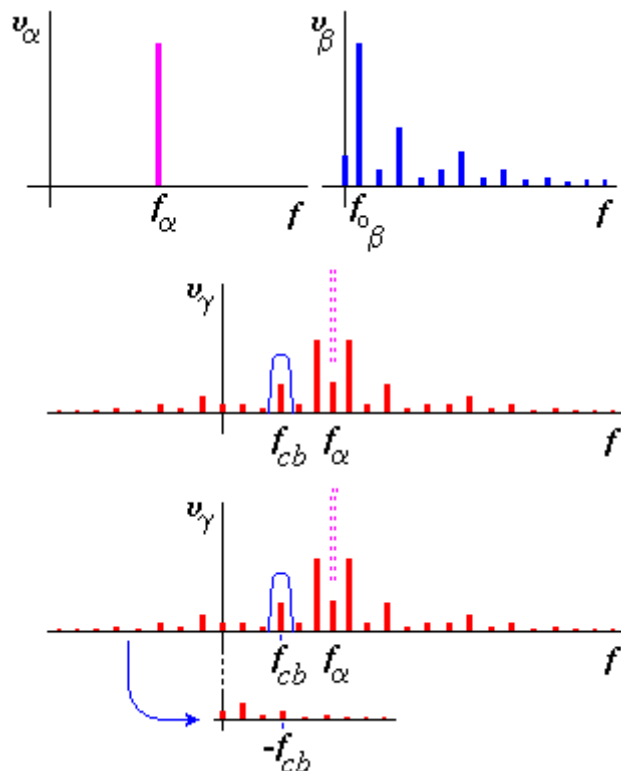
$$\begin{aligned}
v_{\alpha}(t) \cdot v_{\beta}(t) = & a_0 \cos(2\pi f_{\alpha} t) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos[2\pi(f_{\alpha} + n f_{0\beta})t - \varphi_n] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos[2\pi(f_{\alpha} - n f_{0\beta})t + \varphi_n]
\end{aligned}$$

Si vede pertanto che il segnale prodotto ha uno spettro che risulta dalla replica simmetrica dello spettro del modulante attorno alla riga spettrale della portante.



Se si varia la frequenza del segnale portante si ottiene uno "spostamento" in frequenza dello spettro del segnale prodotto che può essere utilizzato per eseguire la analisi spettrale del segnale modulante tramite un filtro selettivo a frequenza di centro banda fissa.

Supponiamo di utilizzare un filtro a frequenza di centro-banda f_{cb} che risulti essere uguale alla frequenza minima di oscillazione del VCO.



Come si può notare dalla figura sopra riportata, le frequenze f_b delle componenti spettrali del segnale originale che, per effetto dello spostamento in frequenza, riescono a superare il filtro sono quelle per cui:

$$f_{cb} = \pm (f_{\alpha} - f_{\beta})$$

Da questa si ricavano due possibili frequenze del segnale sotto analisi che potrebbero attraversare il filtro selettivo:

$$f_{\beta} = f_{\alpha} \mp f_{cb} \Rightarrow \begin{cases} f_{\beta 1} = f_{\alpha} - f_{cb} \\ f_{\beta 2} = f_{\alpha} + f_{cb} \end{cases}$$

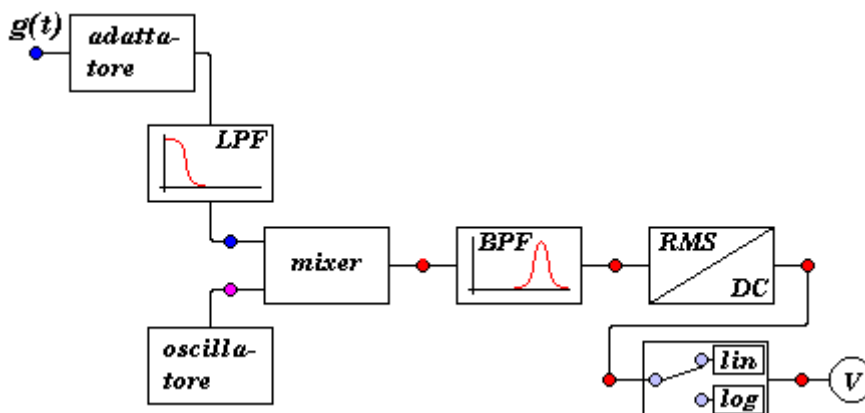
Per evitare che le due componenti si possano sovrapporre nella indicazione dello strumento si introduce il filtro passa-basso di ingresso che ha il compito di eliminare dallo spettro le componenti a frequenza superiore.

L'analisi dello spettro del segnale viene pertanto effettuata variando con continuità la frequenza di oscillazione della portante grazie alla tensione a rampa che viene applicata in ingresso al VCO. Il filtro selettivo, a frequenza costante, può essere realizzato con quarzi allo scopo di ottenere delle selettività estremamente elevate. Ovviamente la velocità di scansione dello spettro e la larghezza di banda del filtro sono ancora legate dalle considerazioni fatte a proposito dell'analizzatore a filtro accordabile.

L'uso di un CRT per la rappresentazione dello spettro limita la qualità della misura per la già descritta incertezza che affligge la lettura della traccia sullo schermo (risoluzione, parallasse, ecc.).

Analizzatore d'onda a filtro selettivo con circuito supereterodina

Il principio di funzionamento è lo stesso dell'analizzatore di spettro, pertanto lo schema base ha solamente alcune varianti minori: viene eliminato il generatore di rampa ed il segnale portante è fornito da un oscillatore regolabile manualmente. Il dispositivo di output è, in questo caso, uno strumento voltmetrico (spesso in forma analogica) che permette di ottenere una lettura molto più accurata di quanto invece permesso dal CRT nell'analizzatore di spettro.



La selettività del filtro passa-banda, e quindi la risoluzione dello strumento, può essere molto spinta dato che ogni armonica resta selezionata per un tempo sicuramente sufficiente a fare arrivare a regime lo strumento indicatore. Solamente dopo aver effettuato la lettura, infatti, l'operatore modifica la frequenza dell'oscillatore per selezionare una nuova armonica. Evidentemente questa

maggior risoluzione si paga con l'aumento, drastico, del tempo necessario per completare l'analisi spettrale.

Più che per una analisi spettrale completa questo strumento è però indicato come voltmetro selettivo e come rivelatore di zero in alternata.

5 - Analizzatore di spettro numerico a FFT

Il teorema del campionamento (teorema di Shannon)

Questo fondamentale teorema afferma che dal segnale "tempo discreto" ricavato tramite il campionamento di un segnale "tempo continuo" a banda B limitata si possono ricavare tutte le informazioni portate dal segnale originale a patto che:

- la durata dell'intervallo che separa ciascun campione dal precedente sia inferiore a $1/2B$
- si disponga di infiniti campioni (presi a partire dall'istante $t = -\infty$ e fino all'istante $t = \infty$)

Una esauriente trattazione delle condizioni sopra esposte è stata fornita nella lezione relativa alla conversione analogico-digitale e ad essa si rimanda per eventuali richiami.

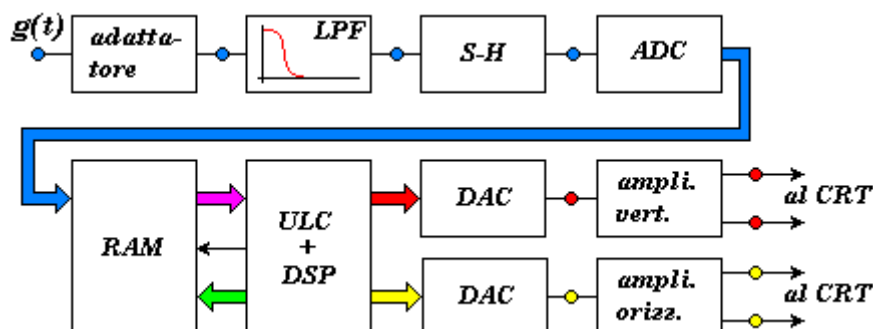
Volendo realizzare effettivamente un'analisi del segnale per via numerica si devono superare alcuni ostacoli che, nel momento in cui si è introdotta l'operazione di campionamento, erano stati trascurati: vedremo come tali ostacoli vengono affrontati nell'analizzatore di spettro numerico.

Analizzatore di spettro numerico

L'analizzatore di spettro numerico ha un circuito che, nello stadio di ingresso, risulta assai simile a quello dell'oscilloscopio numerico: anche qui troviamo un circuito adattatore di ingresso (attenuatore variabile seguito da un amplificatore a guadagno fisso), un circuito di campionamento e conversione (sample-hold e convertitore AD) ed una memoria RAM; a differenza dell'oscilloscopio, però, qui troviamo anche un filtro "passa-basso" la cui funzione verrà descritta nel seguito.

Un dispositivo aritmetico-logico (ULC + DSP) ha il duplice compito di supervisionare il funzionamento dei vari blocchi e di elaborare i dati memorizzati nella RAM secondo un algoritmo che implementa la trasformata discreta di Fourier.

Il risultato dell'analisi (diagramma di ampiezza e/o di fase) viene fornito dalla traccia su di uno schermo di CRT.



L'analisi del segnale ha inizio con una fase di campionamento nella quale il sample-and-hold ed il convertitore AD acquisiscono, ad istanti equispaziati di T_s , i valori del segnale da analizzare.

1° vincolo imposto dal teorema del campionamento

Affinchè la successione dei campioni conservi le informazioni del segnale originale (condizione questa indispensabile per poter ricavare lo spettro dai dati campionati) il valore massimo di T_s deve rispettare il primo vincolo stabilito dal teorema del campionamento. Deve così risultare:

$$f_s = \frac{1}{T_s} > 2B \Rightarrow T_s < \frac{1}{2B}$$

in cui B rappresenta la "banda" del segnale sotto analisi.

Proprio per garantire che la condizione sopra citata possa essere verificata viene inserito nello strumento il filtro "passa-basso" di ingresso: la sua frequenza di taglio (o, meglio, la sua frequenza di arresto o "stop-frequency") viene fissata a metà della frequenza massima di campionamento concessa dal blocco S-H / ADC.

2° vincolo imposto dal teorema del campionamento

Il soddisfacimento del secondo vincolo imposto dal teorema di Shannon è impossibile per molteplici cause: in primo luogo perché lo strumento non dispone di una RAM in grado di memorizzare un numero infinito di campioni, in secondo luogo perché lo strumento non può evidentemente aver iniziato il campionamento ad un istante che precede di un tempo infinito quello corrente (*cosa vuol dire poi "tempo infinito"? basta 1 anno oppure bisogna spingersi ancora prima...?!*) e concludere la sua azione ad un istante che segue di un tempo infinito quello corrente (*idem, mutatis mutandis...!*)

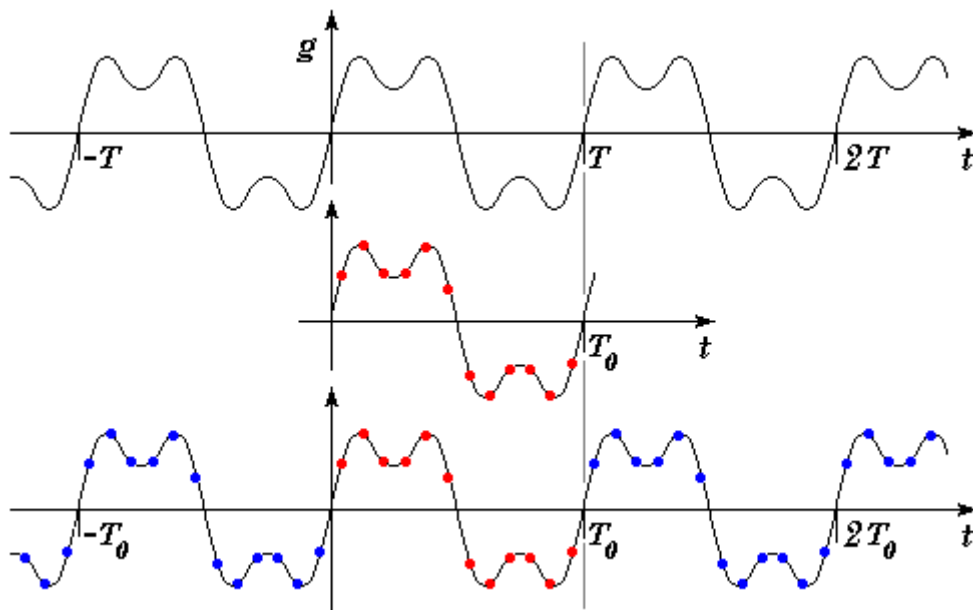
Come si potrebbe allora procedere per superare questo vincolo che appare ora insormontabile?

Una prima soluzione appare se si considera che il segnale originale tempo-continuo, per i vincoli impliciti espressi dal teorema di Shannon che lo vuole a banda limitata, è periodico: esso si ripete quindi identicamente ad intervalli regolari ed è retto dalla generica funzione:

$$g(t) = g(t - nT) \quad \forall t \in R$$

in cui n è un intero e T rappresenta il "periodo" del segnale.

Disponendo quindi dei campioni relativi ad un solo periodo si potrebbe, sotto l'ipotesi che il segnale si sia mantenuto identico, assumere la conoscenza di infiniti campioni in modo da soddisfare anche il secondo vincolo del teorema del campionamento. L'operazione, che può essere indicata con il termine di "periodicizzazione" è illustrata nella figura seguente:



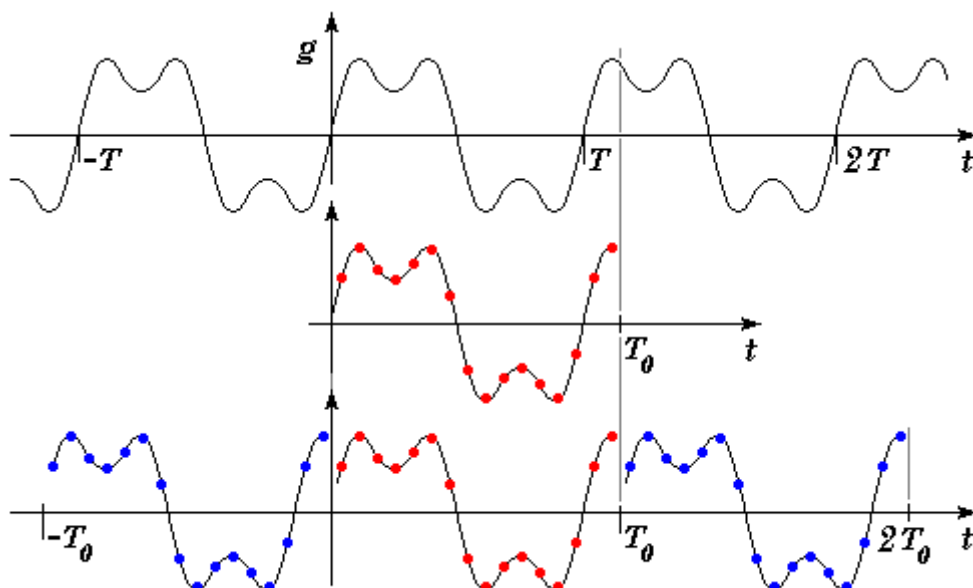
Disponendo di soli 12 punti acquisiti nell'intervallo "di osservazione" $[0, T_0]$ si potrebbe costruire artificialmente la successione di infiniti campioni in maniera da soddisfare i requisiti del teorema di Shannon.

Il leakage

Nella realtà, però, non è possibile rendere la durata dell'intervallo di osservazione $[0, T_0]$ pari esattamente al periodo T del segnale sotto analisi per due principali motivi:

1. T è incognito,
2. la frequenza di campionamento è imposta da un oscillatore quarzato pertanto può essere variata con discontinuità ed il numero di campioni che possono essere acquisiti è limitato dalla capacità della RAM e, affinché l'algoritmo che calcola la trasformata di Fourier operi al meglio, esso deve essere pari ad una potenza di 2.

La situazione reale, pertanto si discosta da quella sopra indicata ed assume l'andamento schematizzabile nella seguente figura.

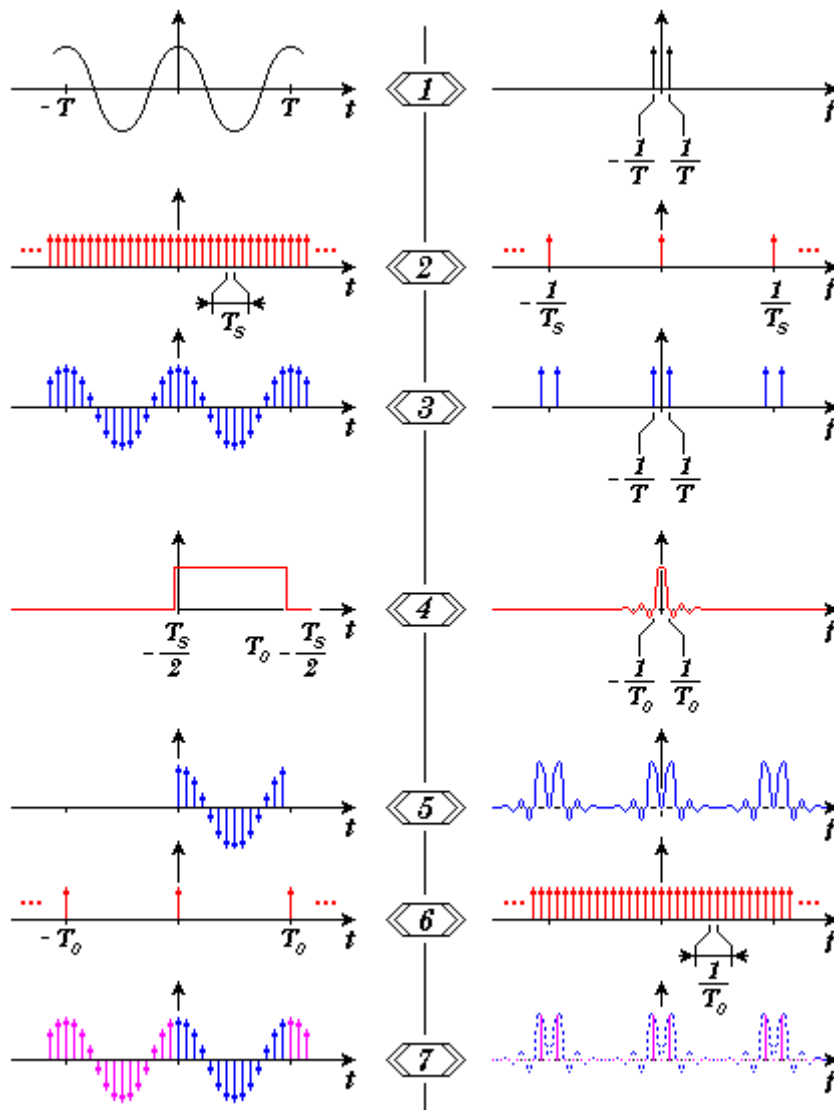


Come è facile vedere il segnale ricostruito mediante periodicizzazione si discosta da quello originario sia per la forma d'onda, sia per il periodo e quindi per la frequenza base (frequenza della componente fondamentale).

La distorsione introdotta a causa della differenza fra il periodo del segnale sotto analisi e la durata dell'intervallo di osservazione viene chiamata "leakage"

Volendo esaminare i diversi fenomeni che portano alla nascita del leakage sotto l'aspetto matematico bisogna ritornare alla descrizione rigorosa del campionamento fornita nella lezione relativa alla conversione A/D.

Vediamo quindi, con l'aiuto della figura seguente, cosa effettivamente significhi campionare per un tempo finito e poi rendere periodica la sequenza dei campioni acquisiti.

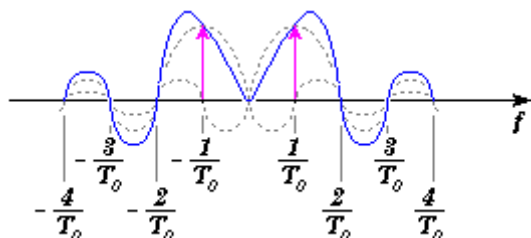


- Nel diagramma 1 sono riportati l'andamento nel tempo e lo spettro del segnale di periodo T sotto analisi (si è, per semplicità, fatto riferimento ad un segnale di tipo cosinusoidale).
- Nel diagramma 2 vediamo la funzione di campionamento (successione di infinite delta di Dirac) ed il suo spettro che, come sappiamo, è costituito da una successione di infinite delta di Dirac spaziate di $1/T_S$.
- L'effetto del campionamento è rappresentato, nel dominio del tempo, dal prodotto fra il segnale sotto analisi e la funzione di campionamento e, nel dominio della frequenza, dalla

convoluzione degli spettri: il diagramma 3 rappresenta andamento e spettro del segnale campionato.

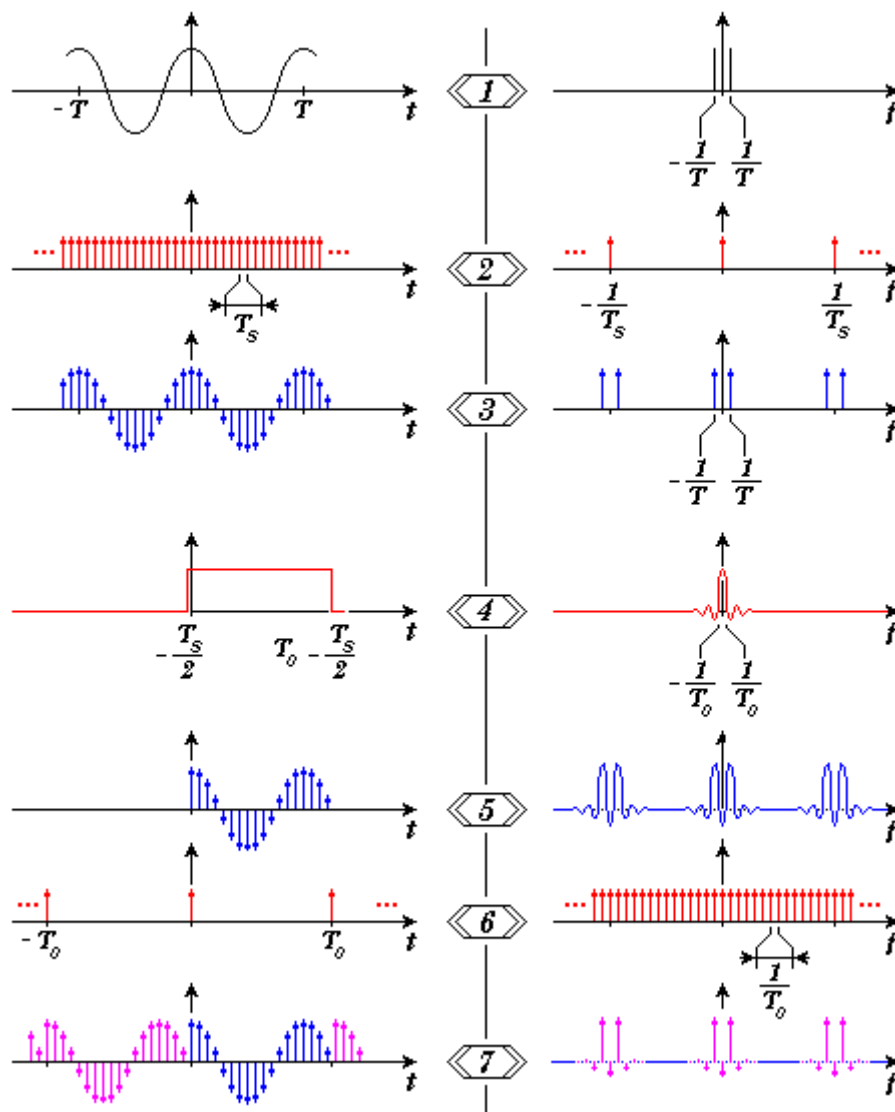
- La impossibilità di operare con un numero infinito di campioni a cui si è fatto riferimento introducendo il leakage impone di operare una "finestratura" moltiplicando l'andamento del segnale campionato per la funzione "finestra" (nell'esempio si usa una finestra rettangolare): il grafico 4 riporta andamento e spettro di tale finestra e l'operazione di finestratura comportando il prodotto nel dominio del tempo equivale alla convoluzione degli spettri nel dominio della frequenza.
- Il grafico 5 mostra il risultato della finestratura nel caso in cui la durata della finestra coincida con il periodo del segnale sotto analisi.
- A questo punto si deve rendere periodico il segnale così ottenuto: la periodicizzazione viene ottenuta effettuando la convoluzione nel tempo del segnale finestrato (grafico 5) e del segnale riportato nel grafico 6. La convoluzione nel dominio del tempo porta al prodotto nel dominio della frequenza pertanto lo spettro del segnale verrà campionato con un passo in frequenza pari a $1/T_0$.
- Nell'ultimo grafico vengono quindi riportati l'andamento del segnale periodicizzato ed il suo spettro campionato.

Nella figura seguente viene riportata in scala espansa lo spettro del grafico 7.



Come si può notare, alle ascisse di campionamento diverse da $\pm 1/T_0$ la composizione dei lobi laterali dello spettro della finestra fornisce un'ampiezza nulla pertanto l'insieme delle fasi che si sono succedute non hanno portato ad alterazioni rilevabili dello spettro che si ottiene e non si è verificato il leakage.

Completamente diverso è invece il caso in cui la durata della finestra T_0 ed il periodo del segnale T non coincidono (o non sono multipli l'uno dell'altro). In questo caso il leakage è in agguato con una evidente distorsione spettrale: la seguente figura illustra appunto il fenomeno.



I primi tre diagrammi sono identici a quelli già esaminati nel caso precedente: al diagramma 4, invece, si introduce una finestra la cui durata T_0 differisce da T .

- Nel diagramma 5 sono riportati l'andamento della successione dei campioni acquisiti ed il suo spettro.
- Rendiamo ora periodica la successione del grafico 5 mediante la convoluzione del suo andamento temporale con quello della funzione riportata nel grafico 6. Ancora alla convoluzione nel tempo corrisponde il prodotto (cioè il campionamento) nel dominio della frequenza.
- Il diagramma 7 riporta l'andamento della funzione periodicizzata ed il relativo spettro campionato.

Come è evidente lo spettro del diagramma 7 riporta delle componenti che originariamente non erano presenti. Esse sono state provocate dal fatto che la durata T_0 della finestra non corrisponde ad un multiplo del periodo del segnale originale e sono chiamate "errore di leakage".

Per evitare l'insorgere di evidenti armoniche a causa del leakage si abbandona la finestra rettangolare utilizzata nell'esempio e si utilizzano finestre dotate di spettri caratterizzati da "lobi" laterali meno pronunciati: la prima finestra che è stata introdotta è quella di Hanning, il cui andamento è espresso dalla:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= 0 && \text{per } t < 0 \\
 w(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) && \text{per } 0 \leq t \leq T_0 \\
 w(t) &= 0 && \text{per } t > T_0
 \end{aligned}$$

La finestra di Hanning determina ancora un errore di leakage qualora T_0 non sia multiplo del periodo del segnale ma, grazie alla modesta ampiezza dei lobi laterali del suo spettro, le ampiezze delle armoniche introdotte sono estremamente inferiori a quelle che possono essere determinate dalla finestra rettangolare.

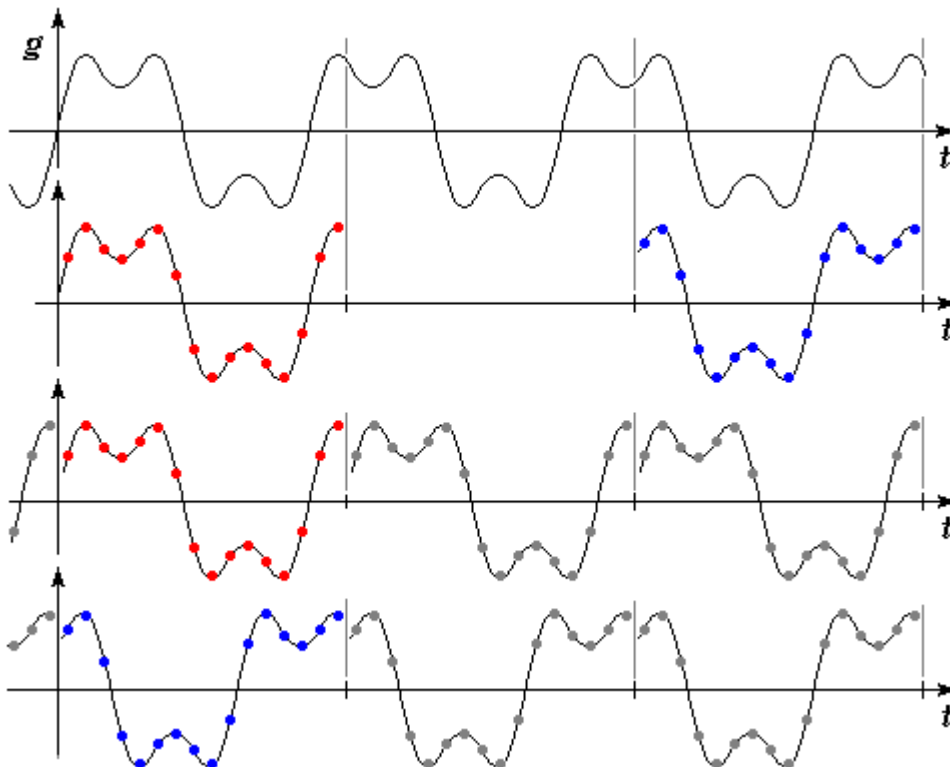
La risoluzione in frequenza

Da quanto esposto si comprende come la risoluzione in frequenza della analisi condotta dipende dalla durata della finestra temporale introdotta.

La risoluzione in frequenza (espressa in Hz) è pari al reciproco della durata della finestra T_0 (espresso in secondi)

Le tecniche di averaging e di overlapping

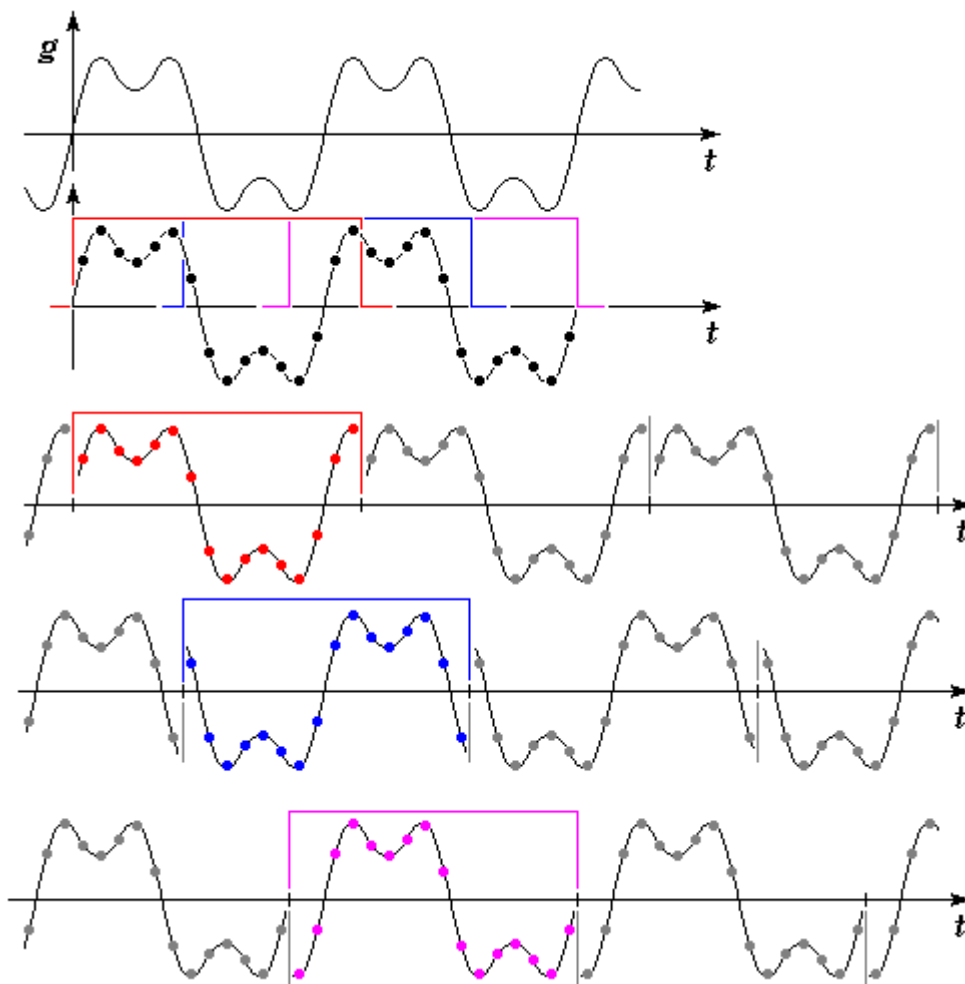
La finestatura del segnale, però, introduce un altro problema: variando la fase della funzione finestra in relazione al segnale sotto analisi viene introdotta una lieve, ma apprezzabile, distorsione dello spettro ricavabile dalla FFT: basta esaminare la seguente figura in cui si è fatto uso, per semplicità, della finestra rettangolare per comprendere che i due segnali periodicizzati hanno spettri diversi:



Per ridurre la incertezza provocata dalla aleatorietà della fase della finestra rispetto al segnale si

possono effettuare più finestre calcolando quindi la media dei diversi spettri ottenuti.

Questa operazione, detta "di averaging", comporta la necessità di acquisire un numero proporzionalmente maggiore di campioni del segnale: allo scopo di ridurre questo numero si può mettere in atto la tecnica di "overlapping" che consiste nella parziale sovrapposizione delle finestre operate sulla stessa successione di campioni. La figura seguente mostra come un numero relativamente ridotto di campioni possa essere utilizzato per il calcolo di più spettri mediante diverse finestre.



In questo esempio 28 campioni vengono utilizzati per la generazione di 3 diversi segnali periodicizzati; se non si fosse fatto ricorso alla tecnica di overlapping gli stessi risultati avrebbero richiesto l'uso di ben 48 campioni!!!

6 - Conclusioni

L'analisi spettrale vuole individuare l'ampiezza e, quando possibile, la fase delle armoniche che compaiono nello spettro di un segnale periodico.

Gli strumenti analogici non sono in grado (se si esclude quello a tempo reale) di analizzare e fornire contemporaneamente le ampiezze di tutte le armoniche comprese nel campo di analisi. Gli strumenti numerici, invece, basandosi su di un processo di periodicizzazione, sono in grado di analizzare contemporaneamente tutte le armoniche, ma il processo di calcolo non è immediato e viene normalmente eseguito "fuori linea", cioè successivamente alla fase di acquisizione.

La risoluzione in frequenza ottenibile è normalmente superiore per gli strumenti numerici mentre la banda analizzabile è maggiore con gli strumenti analogici.

Molto spesso, per migliorare le prestazioni del dispositivo di visualizzazione e per consentire l'interfacciamento dello strumento con i dispositivi di acquisizione dati ed i controllori esterni ad una prima parte di analisi analogica basata sullo schema a supereterodina segue una parte numerica che digitalizza l'uscita del convertitore RMS/DC.

Quesiti di ricapitolazione



Domande d'esame

- Sugli analizzatori analogici:
 - Analizzatore di spettro a filtri multipli: schema, funzionamento, risoluzione in frequenza.
 - Analizzatore di spettro a scansione con circuito supereterodina: schema, funzionamento, risoluzione in frequenza e tempo di scansione.
 - Analizzatore d'onda a scansione con circuito supereterodina: schema, funzionamento, risoluzione in frequenza.
- Sugli analizzatori numerici
 - Analizzatore di spettro a FFT: schema, funzionamento, periodicizzazione e risoluzione in frequenza.
 - Errore di Leakage e azioni per la sua riduzione: "finestre non rettangolari".

Materiale fuori testo

Può essere interessante visitare le pagine del sito web della Hewlett-Packard dedicate agli analizzatori di spettro:

- [<http://www.tmo.hp.com/tmo/datasheets/English/HP8591E.html>] per uno strumento di base;
- [<http://www.tmo.hp.com/tmo/datasheets/English/HPE4401B.html>] per una serie di strumenti portatili;
- [<http://www.tmo.hp.com/tmo/Products/English/CombinationNetworkSpectrumAnalyzers.html>] per gli strumenti combinati "analizzatori di spettro e di rete".

Bibliografia per approfondimenti

- Libri::
 - E. Oran Brigham: "The Fast Fourier Transform"
Editore: Prentice-Hall - Englewood Cliffs, N.J.
 - L. Benetazzo: "Misure elettroniche"

Editore: CLEUP - Padova

ultimo aggiornamento 05/02/03

Ogni sfruttamento commerciale del materiale distribuito da questo server è vietato

GMEE - Università Politecnica delle Marche - Ancona © 1977-2003