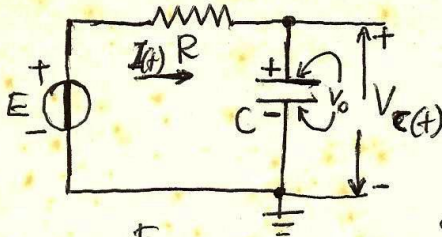


Legge generale di carica di un condensatore con tensione iniziale  $V_0$  (all'istante  $t=0$ ) verso la tensione  $E$  (con  $V_0$  avute polarità concorde o discorde con quella di  $E$ )

1° caso ( $V_0$  ha la stessa polarità di  $E$ ) (Fig. 1)



Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando che il fenomeno risulta complessivamente costituito da una fase di scarica, dovuta

Fig. 1 con l'eccitazione  $E$  annullata alla tensione iniziale  $V_0$ , e da una successiva fase di carica, con tensione iniziale nulla, verso la tensione  $E$ . In sostanza la risposta  $V_C(t)$  si calcola sommando i contributi  $V_C'(t)$  e  $V_C''(t)$ , dovuti rispettivamente alla fase di scarica del condensatore  $C$ , carico inizialmente alla tensione  $V_0$  (Fig. 2), ed alla fase di carica del condensatore  $C$  da 0 verso  $E$  (Fig. 3).

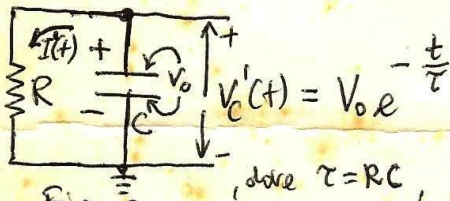


Fig. 2

fase di scarica da  $V_0$  a 0 (C è inizialmente carico alla tensione  $V_0$ )

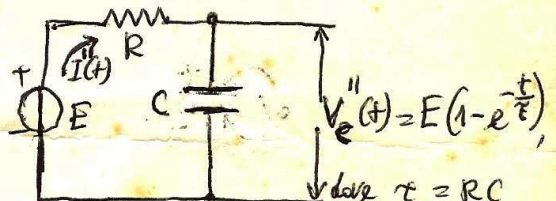
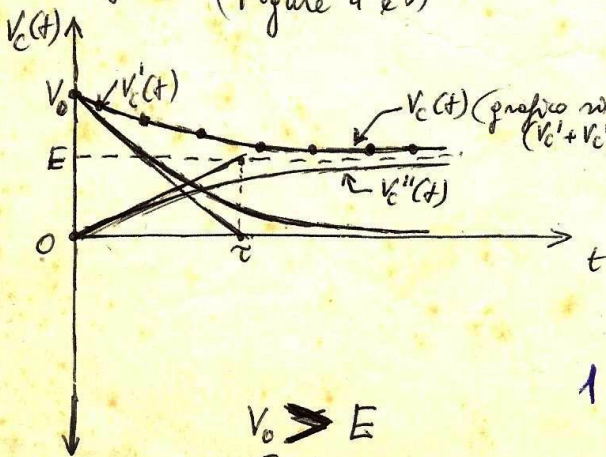


Fig. 3

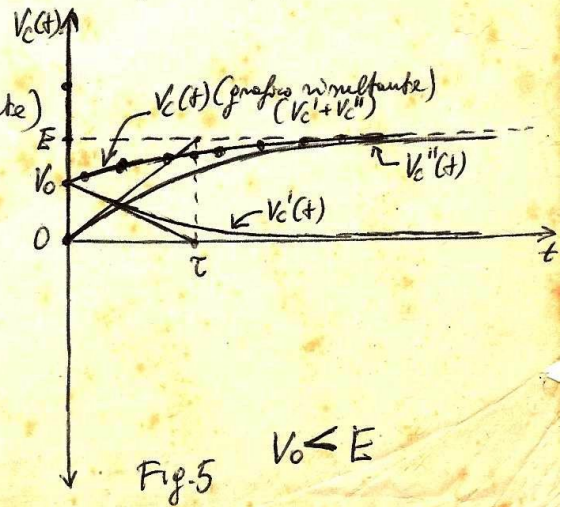
fase di carica da 0 verso  $E$  (C è inizialmente scarico)

$$V_C(t) = V_C'(t) + V_C''(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Il grafico di  $V_C(t)$  si ottiene sommando i grafici di  $V_C'(t)$  e di  $V_C''(t)$  (Figure 4 e 5)



$V_0 > E$   
Fig. 4



$V_0 < E$   
Fig. 5

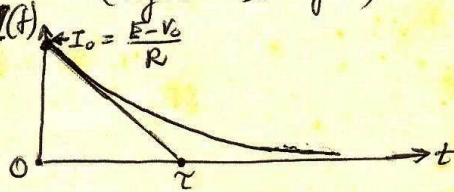
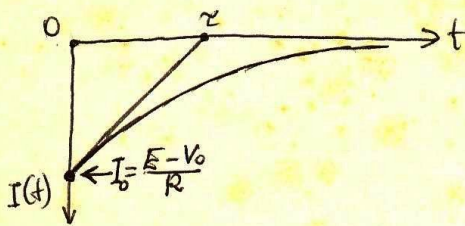
La corrente  $I(t)$  si ottiene applicando la 2<sup>a</sup> legge di Kirchhoff alle maglie di Fig. 1:

$$E - V_c(t) = RI(t), \text{ dove } V_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$E - V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - E + E e^{-\frac{t}{\tau}} = RI(t)$$

e risolvendo rispetto a  $I(t)$  si ha:

$$I(t) = \underbrace{\frac{E - V_0}{R}}_{I_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{Fig. 6 e Fig. 7})$$



Antonio Acciarola

Fig. 6  
 $V_0 > E, I(t) < 0$

Fig. 7  
 $V_0 < E, I(t) > 0$

Se si vuole conoscere l'istante  $t^*$  in cui la tensione  $V_c(t)$  assume un dato valore  $V_c^*$  (con  $E < V_c^* < V_0$ ) (Fig. 4) o con  $V_0 < V_c^* < E$  (Fig. 5), si deve risolvere l'equazione rispetto a  $t$  facendo uso delle ~~proprietà~~ proprietà dei logaritmi.

Si pone  $V_c^* = V_c(t^*)$ , e si ha quanto segue:

$$V_c^* = V_0 e^{-\frac{t^*}{\tau}} + E - E e^{-\frac{t^*}{\tau}}, \quad V_c^* - E = (V_0 - E) e^{-\frac{t^*}{\tau}}$$

$$\frac{V_c^* - E}{V_0 - E} = e^{-\frac{t^*}{\tau}} \rightarrow \ln \frac{V_c^* - E}{V_0 - E} = -\frac{t^*}{\tau}$$

$$t^* = -\tau \ln \frac{V_c^* - E}{V_0 - E} = \tau \ln \left( \frac{V_0 - E}{V_c^* - E} \right)^{-1} = \tau \ln \frac{V_0 - E}{V_c^* - E}$$

2° caso ( $V_0$  ha polarità opposta a quella di  $E$ )  
(Fig. 8)

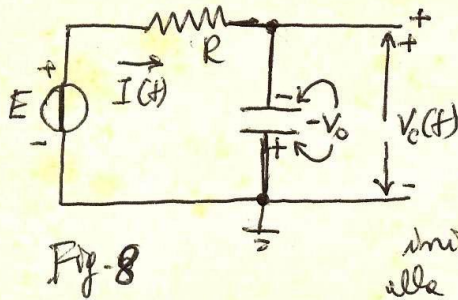


Fig. 8

Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti considerando i contributi  $V_c'(t)$  e  $V_c''(t)$  dovuti rispettivamente alle fase di scarica del condensatore, carico inizialmente alla tensione  $-V_0$  (Fig. 9), ed alle fase di carica del condensatore  $C$  da 0 verso  $E$  (Fig. 10):

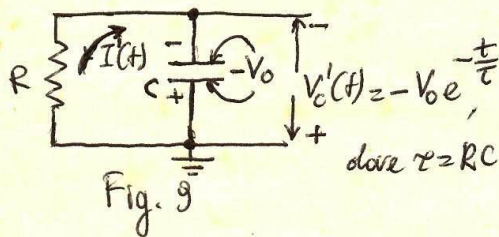


Fig. 9

fase di scarica da  $-V_0$  a 0  
( $C$  è inizialmente carico alla tensione  $-V_0$ )

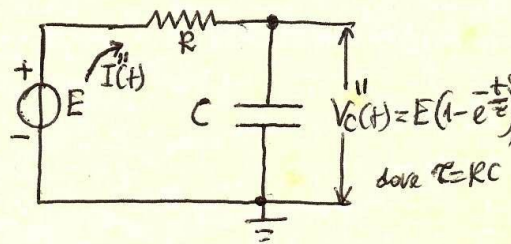


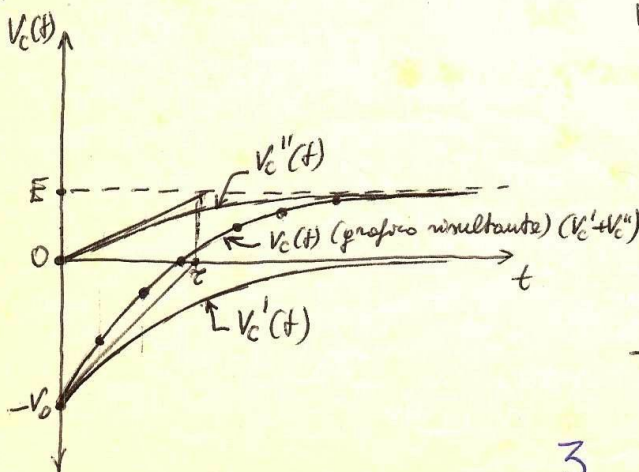
Fig. 10

fase di carica da 0 verso  $E$   
( $C$  è inizialmente scarico)

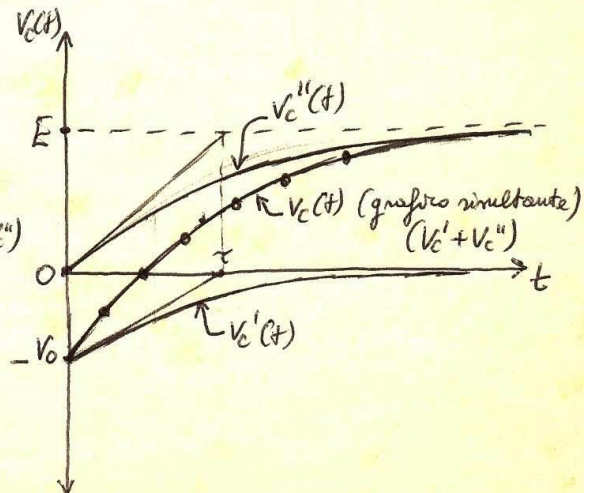
Autonomia di calcolo

$$V_c(t) = V_c'(t) + V_c''(t) = -V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Il grafico di  $V_c(t)$  si ottiene sommando i grafici di  $V_c'(t)$  e di  $V_c''(t)$  (Figure 11 e 12)



$V_0 > E$   
Fig. 11



$V_0 < E$   
Fig. 12

La corrente  $I(t)$  si ottiene applicando la 2<sup>a</sup> legge di Kirchhoff alla maglia di Fig. 8.

$$E - V_C(t) = RI(t), \text{ dove } V_C(t) = -V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$E + V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - E + E e^{-\frac{t}{\tau}} = RI(t)$$

e risolvendo rispetto a  $I(t)$  si ha:

$$I(t) = \underbrace{\frac{(V_0 + E)}{R}}_{I_0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{Fig. 13 } \text{ ~~Fig. 13~~})$$

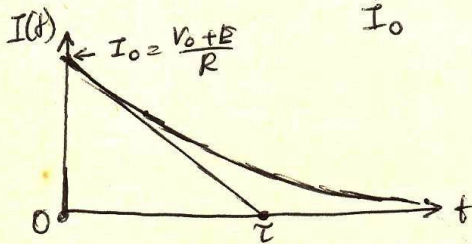


Fig. 13

Se si vuole conoscere l'istante  $t^*$  in cui la tensione  $V_C(t)$  assume un dato valore  $V_C^*$ , si deve risolvere l'equazione rispetto a  $t$  facendo uso delle proprietà dei logaritmi ( $-V_0 < V_C^* < E$ ).

Si pone  $V_C^* = V_C(t^*)$ , e si ha quanto segue:

$$V_C^* = -V_0 e^{-\frac{t^*}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) = -V_0 e^{-\frac{t^*}{\tau}} + E - E e^{-\frac{t^*}{\tau}}$$

$$V_C^* - E = -(V_0 + E) e^{-\frac{t^*}{\tau}} \quad \frac{V_C^* - E}{V_0 + E} = -e^{-\frac{t^*}{\tau}}$$

Cambiando di segno ambo i membri si ha:

$$\frac{E - V_C^*}{E + V_0} = e^{-\frac{t^*}{\tau}} \rightarrow \ln \frac{E - V_C^*}{E + V_0} = -\frac{t^*}{\tau}$$

$$t^* = -\tau \ln \frac{E - V_C^*}{E + V_0} = \tau \ln \left( \frac{E - V_C^*}{E + V_0} \right)^{-1} = \tau \ln \frac{E + V_0}{E - V_C^*}$$

Autunno Quindici

Fare transitorie in un circuito RL alimentato da un generatore (continuo) e percorso inizialmente (all'istante  $t=0$ ) da una corrente verso concorde o discorde con quello della corrente in regime permanente

1° caso ( $I_0$  concorde con la corrente in regime permanente)  
Fig. 14

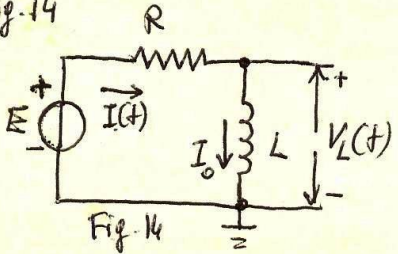


Fig. 14 ed alla f. e. m. E.

Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando la corrente  $I(t)$  risultante dalla somma delle correnti  $I'(t)$  e  $I''(t)$ , dovute rispettivamente alla corrente iniziale nel circuito,  $I_0$  (con  $E=0$ ),

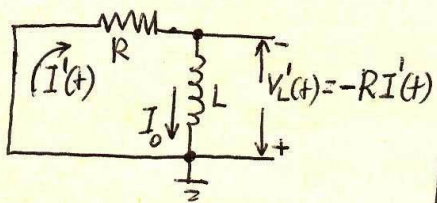


Fig. 15

$$I'(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ dove } \tau = \frac{L}{R}$$

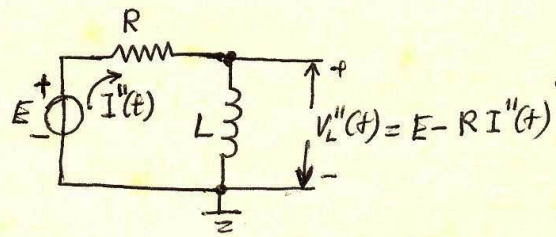


Fig. 16

$$I''(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \text{ dove } \tau = \frac{L}{R}$$

$$I(t) = I'(t) + I''(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

La corrente in regime permanente è data da  $\frac{E}{R}$ .

Il grafico di  $I(t)$  si ottiene sommando i grafici di  $I'(t)$  e di  $I''(t)$ . Si consideri, ad esempio, il circuito di Fig. 17, e si consideri come istante  $t=0$  l'istante coincidente con la commutazione di S da A a B:

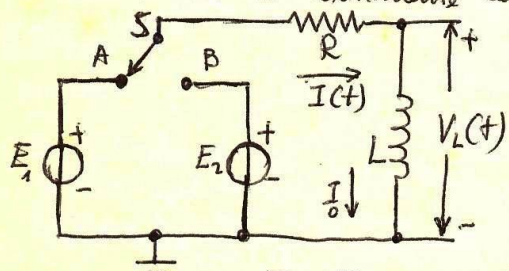


Fig. 17

Quando S è nella posizione A la corrente  $I_0$  è data da  $\frac{E_1}{R}$ , mentre, in regime permanente, dopo la commutazione di S nella posizione B, la corrente è data da  $\frac{E_2}{R}$ , pertanto si ha:

$$I(t) = \frac{E_1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Autunno Cucinotta

In Fig. 18 sono mostrati i grafici di  $I'(t)$  e di  $I''(t)$  ed il grafico risultante di  $I(t) = I'(t) + I''(t)$ .

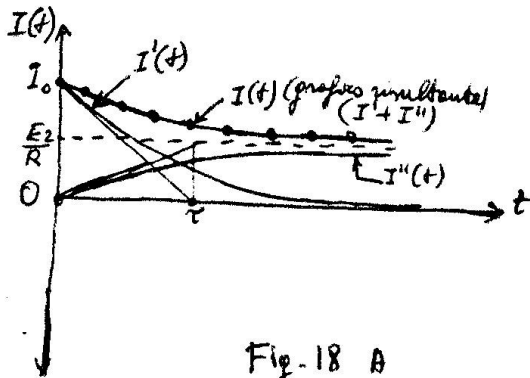


Fig. 18 A

$$I_0 > \frac{E_2}{R}$$

$$\left( I_0 = \frac{E_1}{R} \right)$$

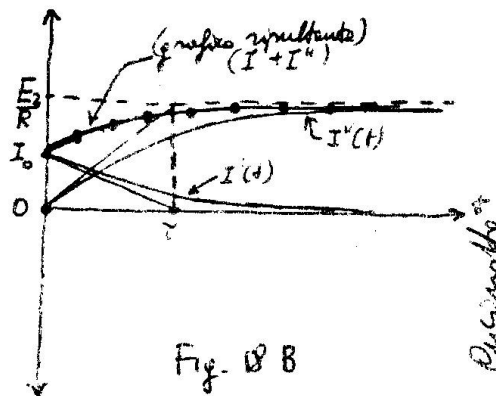


Fig. 18 B

$$I_0 < \frac{E_2}{R}$$

$$\left( I_0 = \frac{E_1}{R} \right)$$

Autunno 2004

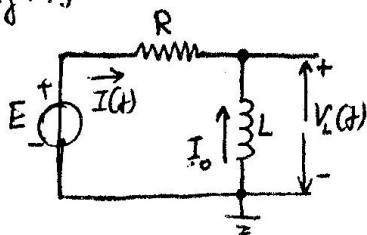
La tensione ai capi di  $L$   $V_L(t)$  si ottiene applicando la 2<sup>a</sup> legge di Kirchhoff alla maglia di Fig. 17, con  $S$  commutato nella posizione B:

$$V_L(t) = E_2 - RI(t) = E_2 - E_1 e^{-\frac{t}{\tau}} - E_2 + E_2 e^{-\frac{t}{\tau}} = (E_2 - E_1) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\left( I(t) = \frac{E_1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right)$$

2° caso ( $I_0$  discorde con la corrente in regime permanente)

Fig. 19



Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando la corrente  $I(t)$  risultante dalla somma delle correnti  $I'(t)$  e  $I''(t)$ , dovute rispettivamente alla corrente iniziale nel circuito  $I_0$  (con  $E=0$ ), ed alla f.e.m.  $E$ .

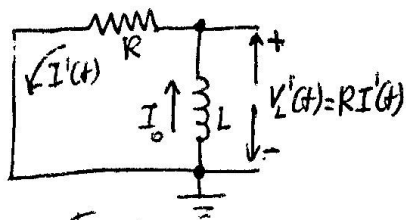


Fig. 20

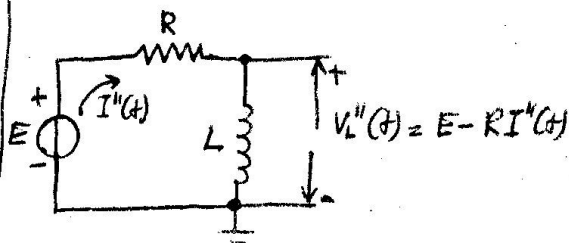
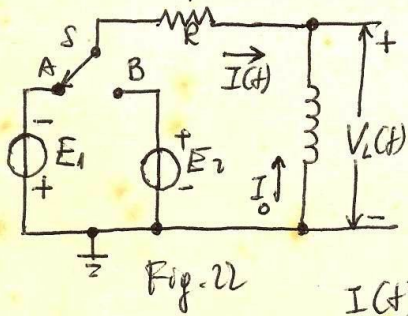


Fig. 21

$$I'(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ dove } \tau = \frac{L}{R}, \quad I''(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$I(t) = -I'(t) + I''(t) = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Si consideri, ad esempio, il circuito di Fig. 22, e si consideri come istante iniziale quello coincidente con la commutazione di S da A a B;



Quando S è nella posizione A, la corrente  $I_0$  è data da  $\frac{E_1}{R}$ , mentre, in regime permanente, dopo la commutazione di S nella posizione B, la corrente è data da  $\frac{E_2}{R}$ ; pertanto si ha:

$$I(t) = -\underbrace{\frac{E_1}{R}}_{I_0} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

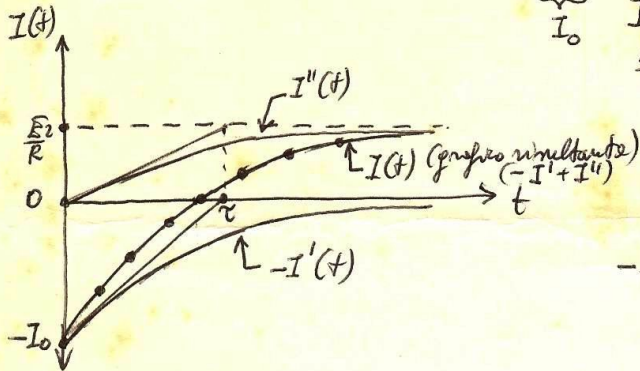


Fig. 23 A

$$I_0 > \frac{E_2}{R}$$

$$(I_0 = \frac{E_1}{R})$$

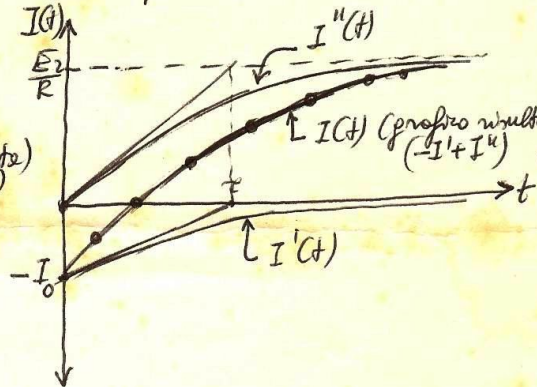


Fig. 23 B

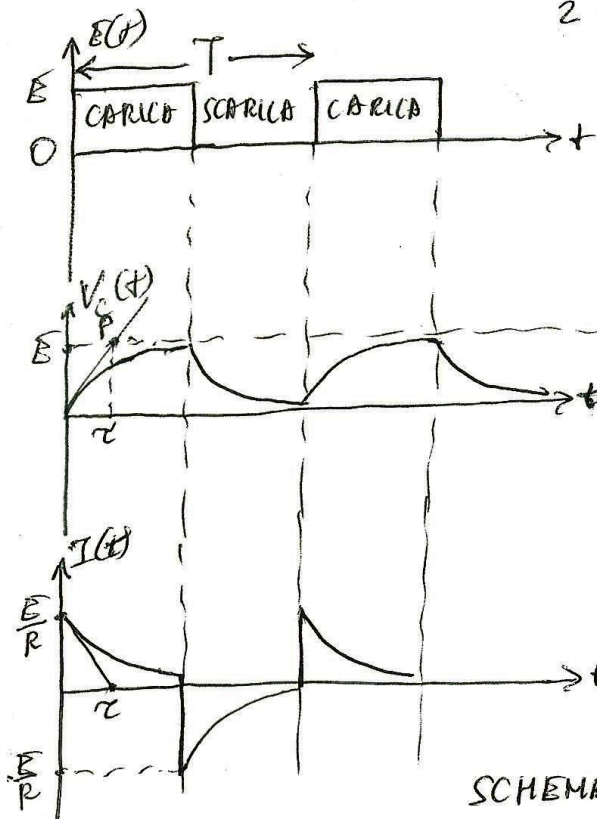
$$I_0 < \frac{E_2}{R}$$

$$(I_0 = \frac{E_1}{R})$$

$$V_L(t) = E_2 - RI(t) = \cancel{E_2} + E_1 e^{-\frac{t}{\tau}} - \cancel{E_2} + E_2 e^{-\frac{t}{\tau}} = (E_1 + E_2) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

RISPOSTA DI UN CIRCUITO RC ALL'ONDA QUADRA  
 ( $\frac{T}{2}$  DEVE ESSERE MAGGIORE O UGALE A  $\tau = RC$ )

$$\frac{T}{2} \geq \tau$$

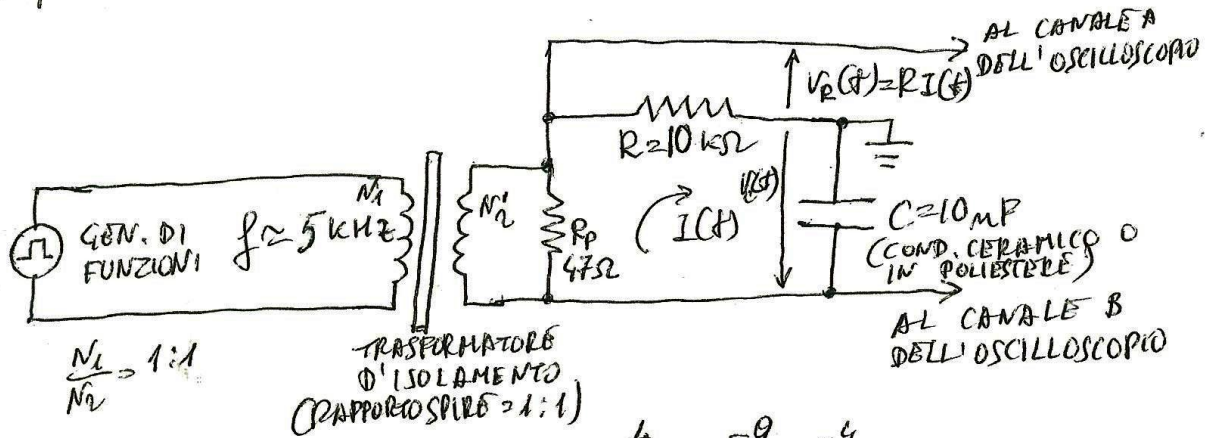


$E$ : AMPIEZZA DELL'ONDA QUADRA  
 ( $E$  PRESENTA UNA COMPONENTE CONTINUA PARI A  $\frac{E}{2}$ )

QUANDO  $E(t) = E$ ,  $V_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$   
 "  $E(t) = 0$ ,  $V_c(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$

QUANDO  $E(t) = E$ ,  $I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$   
 "  $E(t) = 0$ ,  $I(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

SCHEMA ELETTRICO



COSTANTE DI TEMPO  $\tau = RC = 10 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} = 10^{-4} \text{ s} = 100 \mu\text{s}$

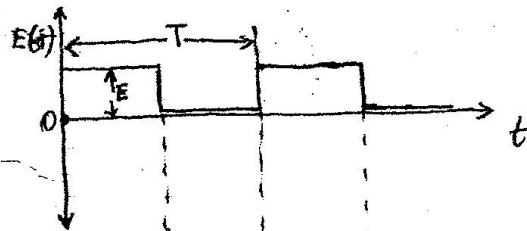
$\frac{T}{2}$  DEVE ESSERE ALMENO PARI A  $\tau = 100 \mu\text{s}$  ;

$\frac{T}{2} \geq 100 \mu\text{s}$

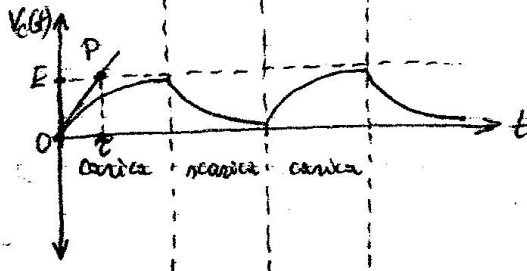
$T \geq 2\tau$ ;  $T \geq 2 \cdot 100 \mu\text{s} = 200 \mu\text{s}$   
 $f \leq \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,5 \cdot 10^4 \text{ Hz} = 5000 \text{ Hz}$



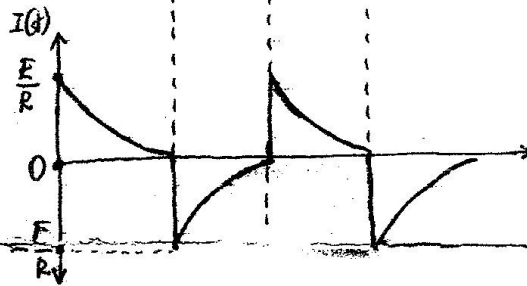
### Risposta di un circuito RC all'onda quadra



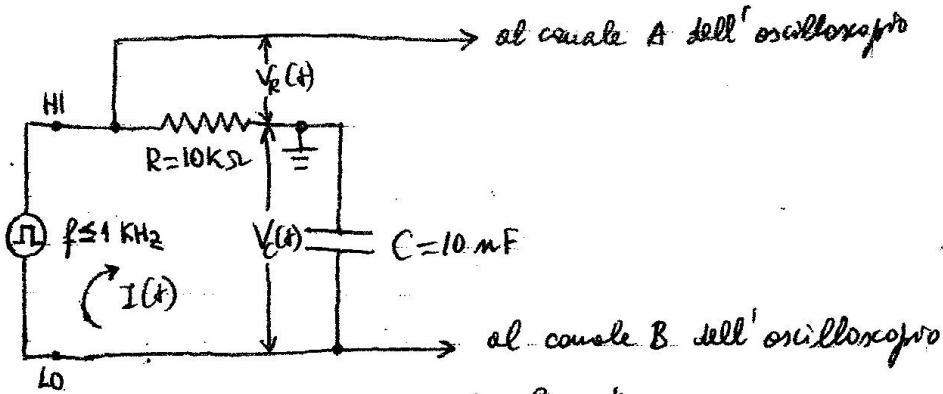
$\frac{T}{2}$  deve essere molto maggiore di  $\tau = RC$   
 $\frac{T}{2} \gg \tau$



carica:  $V_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$   
 scarica:  $V_c(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$



carica:  $I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$   
 scarica:  $I(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$



$\tau = RC = 10^4 \cdot 10^{-8} = 10^{-4} \text{ sec.}$

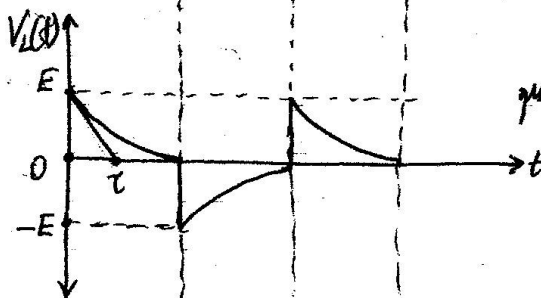
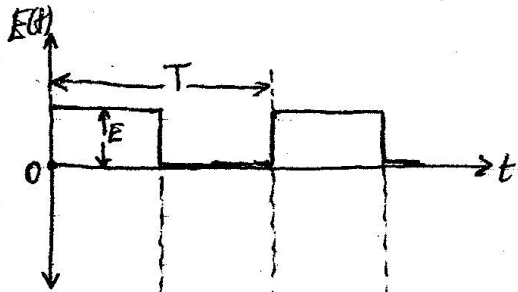
$T$  deve essere molto maggiore di  $2\tau = 2 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$

o almeno deve essere  $\frac{T}{2}$  uguale a  $5\tau$ ;  $\frac{T}{2} = 5\tau$ .

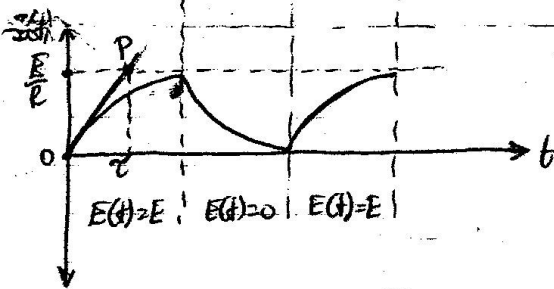
$T = 10\tau = 10 \cdot 10^{-4} = 10^{-3} \text{ sec.}$

risposta di un circuito RL all'onda quadra

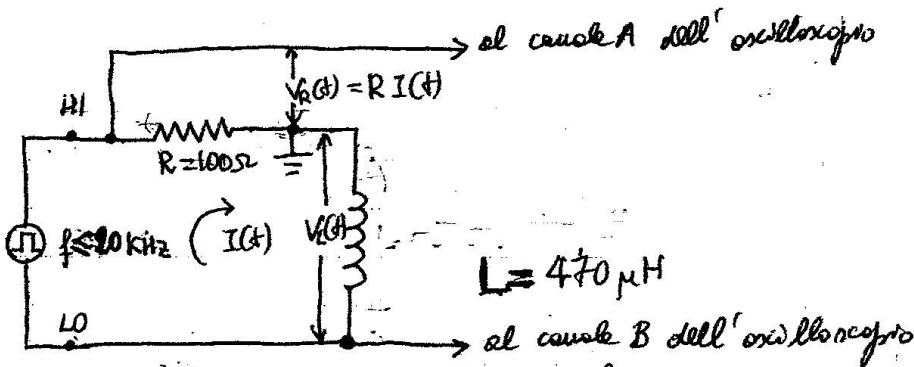
$\frac{T}{2}$  deve essere molto maggiore di  $\tau = \frac{L}{R}$   
 $\frac{T}{2} \gg \tau$



quando  $E(t) = E$ ,  $V_L(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$   
 "  $E(t) = 0$ ,  $V_L(t) = -E e^{-\frac{t}{\tau}}$



quando  $E(t) = E$ ,  $I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$   
 "  $E(t) = 0$ ,  $I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$



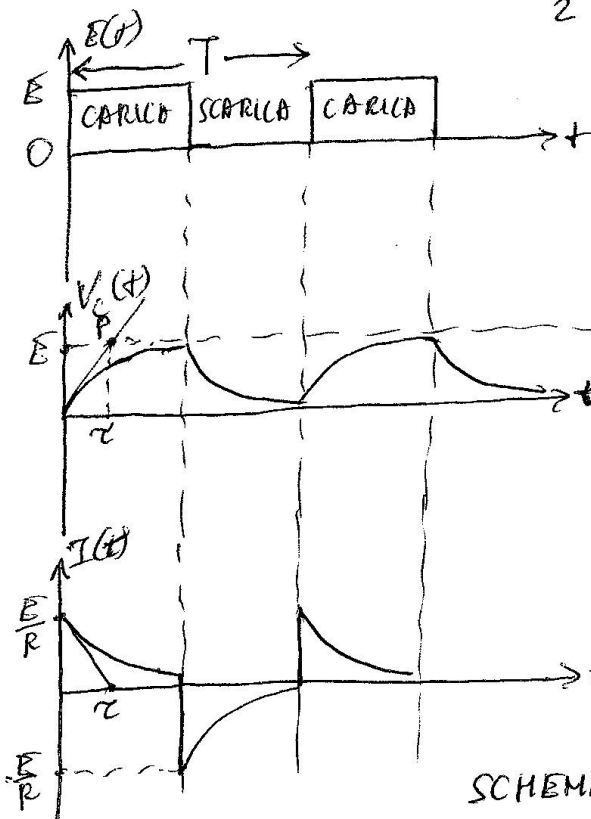
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{500 \cdot 10^{-6}}{10^2} = 500 \cdot 10^{-8} \text{ sec} = 5 \mu\text{sec}$$

$\frac{T}{2}$  deve essere almeno pari a  $5\tau = 5 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$

$$\frac{T}{2} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ sec}, \quad T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$

RISPOSTA DI UN CIRCUITO RC ALL'ONDA QUADRA  
 ( $\frac{T}{2}$  DEVE ESSERE MAGGIORE O UGUALE A  $\tau = RC$ )

$$\frac{T}{2} \geq \tau$$

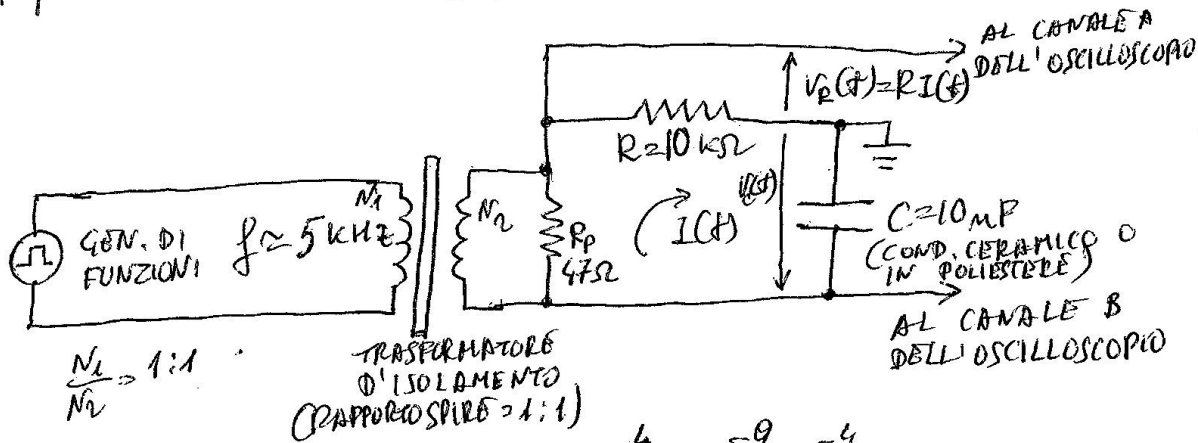


$E$ : AMPIEZZA DELL'ONDA QUADRA  
 ( $E$  PRESENTA UNA COMPONENTE CONTINUA PARI A  $\frac{E}{2}$ )

QUANDO  $E(t) = E$ ,  $V_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$   
 ~  $E(t) = 0$ ,  $V_c(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$

QUANDO  $E(t) = E$ ,  $I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$   
 ~  $E(t) = 0$ ,  $I(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

SCHEMA ELETTRICO



COSTANTE DI TEMPO  $\tau = RC = 10 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 10^{-2} \text{ s} = 100 \mu\text{s}$

$\frac{T}{2}$  DEVE ESSERE ALMENO PARI A  $\tau = 100 \mu\text{s}$  ;

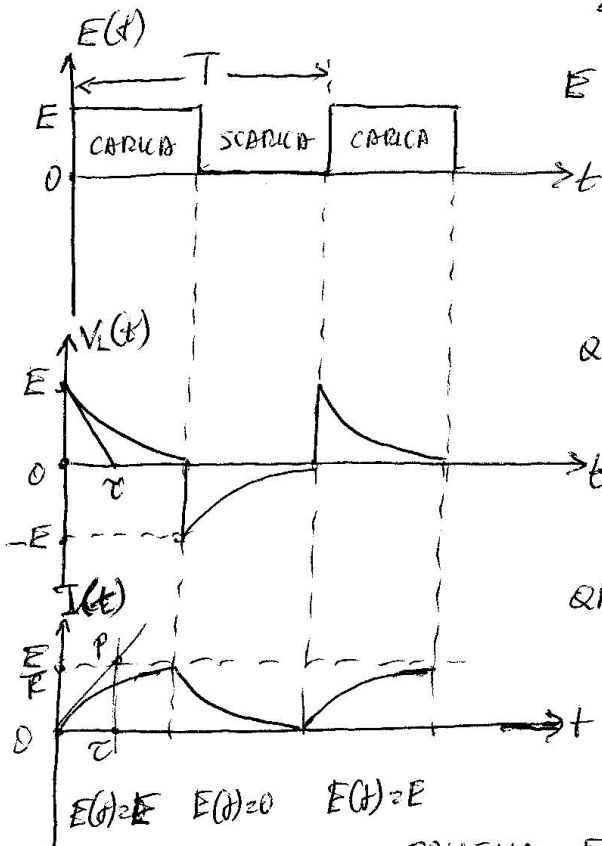
$$\frac{T}{2} \geq 100 \mu\text{s}$$

$T \geq 2\tau$ ;  $T \geq 2 \cdot 100 \mu\text{s} = 200 \mu\text{s}$   
 $f \leq \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,5 \cdot 10^4 \text{ Hz} = 5000 \text{ Hz}$

# RISPOSTA DI UN CIRCUITO RL ALL'ONDA QUADRA

( $\frac{T}{2}$  DEVE ESSERE MAGGIORE O UGUALE A  $\tau = \frac{L}{R}$ )

$$\frac{T}{2} \geq \tau$$

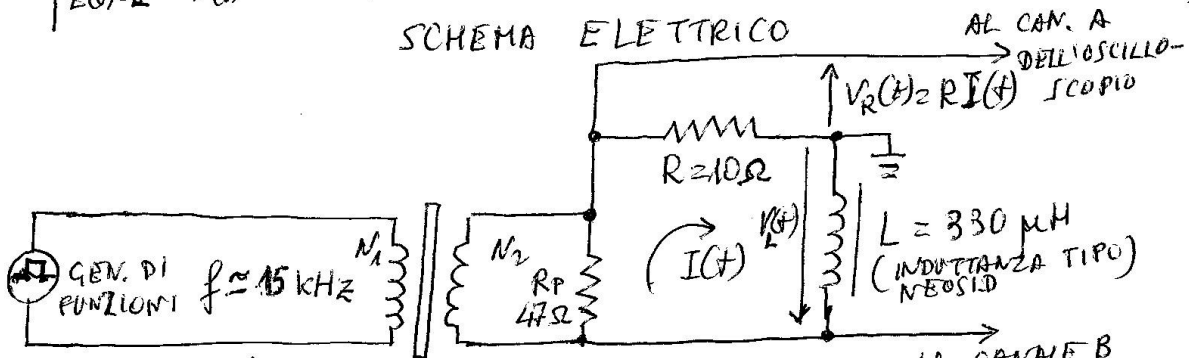


$E$ : AMPIEZZA DELL'ONDA QUADRA  
( $E$  PRESENTE UNA COMPONENTE CONTINUA PARI A  $\frac{E}{2}$ )

QUANDO  $E(t) = E$ ,  $V_L(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$   
 "  $E(t) = 0$ ,  $V_L(t) = -E e^{-\frac{t}{\tau}}$

QUANDO  $E(t) = E$ ,  $I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$   
 "  $E(t) = 0$ ,  $I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

## SCHEMA ELETTRICO



$$\frac{N_1}{N_2} = 1:1$$

TRASFORMATORE D'ISOLAMENTO (RAPPORTO 1:1) SPIRE

COSTANTE DI TEMPO  $\tau = \frac{L}{R} = \frac{330 \cdot 10^{-6}}{10} = 330 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 33 \mu\text{s}$

$$\frac{T}{2} \geq 33 \mu\text{s}$$

$\frac{T}{2}$  DEVE ESSERE ALMENO PARI A  $\tau = 33 \mu\text{s}$   
 $f \leq \frac{1}{T} = \frac{1}{66 \cdot 10^{-6}} = 15151 \text{ Hz}$

# Risposta di un circuito-RLC serie all'onda quadra

3

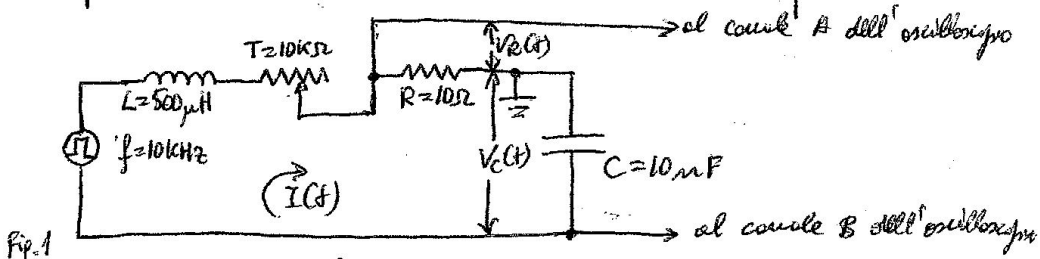
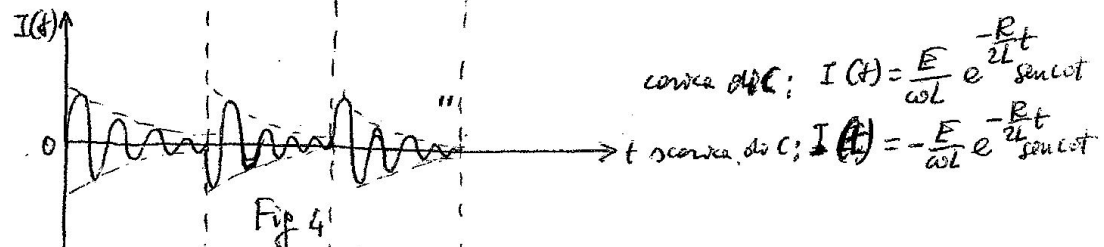
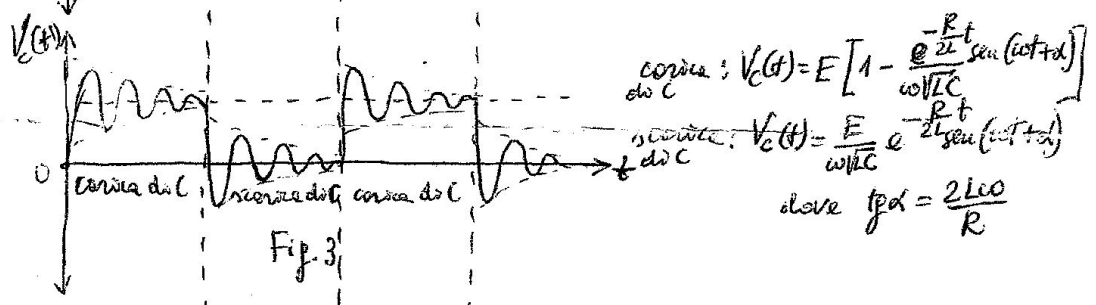
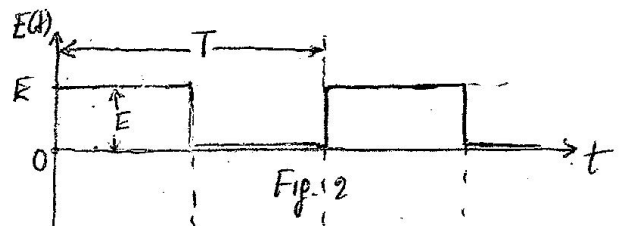
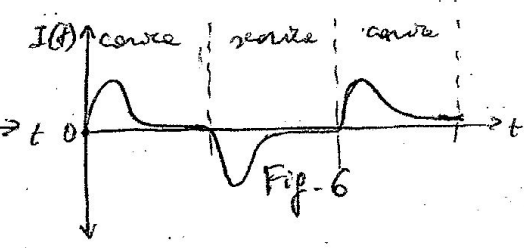
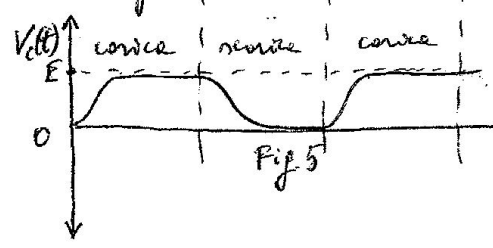


Fig. 1  
 Se  $T+R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  si hanno oscillazioni smorzate con pulsazione  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  (Figure 3 e 4)



Se  $T+R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  la carica e la scarica avvengono con tempi asintoticamente critici (Figure 5 e 6)



Se  $T+R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  le corse e la scarica avvengono con leggi aperiodiche. (Figure 7 e 8)

