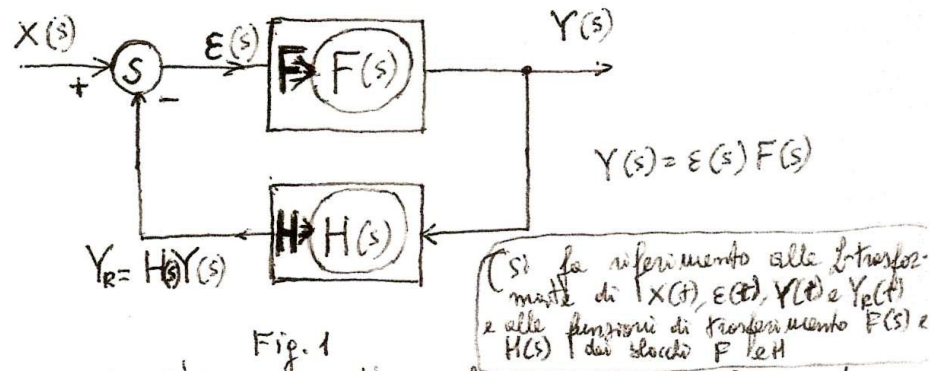


Introduzione ai sistemi di controllo automatico.

Prof. Antonio Lumbroso

Consideriamo un sistema qualsiasi, cioè un complesso di elementi connessi organicamente tra loro in modo da rispondere a determinate richieste progettuali; ad esempio una caldaia alimentata da un bruciatore a gas e richiedente il controllo continuo della pressione del vapore, in modo che la variabile di sistema, la pressione, si mantenga intorno ad un conveniente valore prefissato. Il controllo della pressione in caldaia potrebbe essere attuato manualmente da un operatore che osservi continuamente un manometro ed agisca sulle composizioni della miscela aria-gas del bruciatore, in modo da mantenere sensibilmente costante la variabile di sistema. Ovviamente tale tipo di controllo sarebbe poco utile, in quanto legato all'abilità dell'operatore e soprattutto alla sua possibilità di intervento continuo. Si pensi inoltre alle regolazioni da effettuare in una centrale elettrica per adeguare continuamente la produzione di energia alle variazioni di carico, di cui comporta continue regolazioni della potenza meccanica fornita dalle turbine agli alternatori e dell'intensità di campo degli stessi allo scopo di mantenere sensibilmente costanti la frequenza e la tensione di linea al variare del carico. Soprattutto da questo secondo esempio risulta evidente l'inadeguatezza del controllo manuale a seguire le rapide variazioni delle variabili di sistema allo scopo di ottenere la regolazione richiesta. Un sistema automatico realizza un controllo continuo del processo attraverso l'impiego della reazione negativa (controreazione o feedback), introdotta per la prima volta da Watt nelle macchine a vapore attraverso l'impiego del classico regolatore centrifugo, costituito essenzialmente da due masse rotanti collegate in modo opportuno all'albero della macchina, allo scopo di agire istante per istante sul flusso del vapore immesso nei cilindri, per mantenere costante la velocità di rotazione, nonostante le variazioni di carico meccanico. Altro esempio di regolatore a controreazione ci è fornito da un comune alimentatore stabilizzato in corrente o in tensione, nel quale si fa

in modo che un conveniente campione della corrente o della tensione di uscita venga confrontato con un valore fisso di riferimento, allo scopo di determinare una variazione di corrente o di tensione di segno contrario, tale da compensare la variazione di corrente o di tensione dovuta alla variazione della tensione di linea o alla variazione del carico. In figura 1 è rappresentato lo schema generale, a blocchi, di un sistema di controllo automatico,



dove $X(s)$ è il segnale d'ingresso, detto anche segnale di riferimento, variando il quale si imposta il valore desiderato della grandezza Y di uscita; $Y_R = H(s)Y(s)$ è il segnale di retroazione, determinato dalla funzione di trasferimento $H(s)$ delle rete di reazione della grandezza di uscita, $Y(s)$; $E(s)$ è il segnale di errore, detto anche segnale di attuazione, che pilota il blocco F , caratterizzato dalla funzione di trasferimento $F(s)$ ad anello aperto. Il blocco amplificatore F agisce in modo da ripristinare il valore di Y a regime, che può subire variazioni per effetto di disturbi di vario tipo determinate da cause esterne. Per esempio, nel caso di un alimentatore stabilizzato, X è la tensione di riferimento, fornita in generale da un diodo Zener, F è il cosiddetto amplificatore di errore, costituito generalmente da un amplificatore differenziale ~~o~~ operazionale, Y è la tensione di uscita stabilizzata, H è il partitore di tensione che preleva una frazione della tensione di uscita Y e la invia all'amplificatore di errore attraverso il blocco sommatore S , che fornisce al blocco F il segnale di errore $E = X - Y_R = X - H(s)Y$.

Se invece si tratta di un controllo automatico di temperatura o di pressione, Y rappresenta la temperatura o la pressione, H il blocco trasduttore che converte in tensione la temperatura o la pressione, X è la tensione di riferimento (segnale d'ingresso), che consente di impostare a piacere il valore di temperatura desiderato o si tratta di un termostato, o il valore di pressione desiderato, se si tratta di un pressostato.

- I sistemi di controllo automatico si dividono, rispetto alle modalità di funzionamento, in due grandi categorie:
 sistemi di controllo ON-OFF ^(o discontinui) e sistemi di controllo lineari o continui.
 Un tipico sistema di controllo ON-OFF è costituito dal termostato a lamina bimetallica, che agisce in modo da interrompere la corrente nella resistenza di riscaldamento quando si raggiunge la temperatura voluta, predisponibile mediante unavite di regolazione, e ~~che determina la~~ ~~del circuito~~ tutte le volte che la temperatura scende al di sotto del valore prestabilito. Altro esempio di regolatore discontinuo ON-OFF è il regolatore di livello di un liquido in un serbatoio. (Fig. 2).

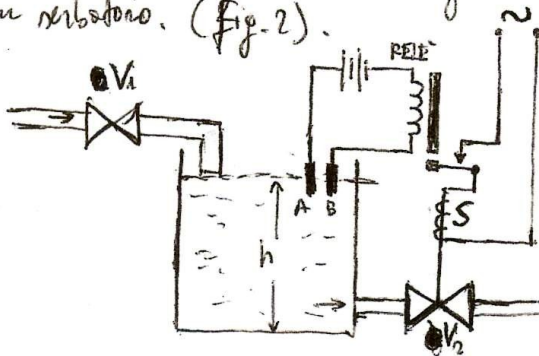


Fig. 2

Vediamo in figura che quando il livello del liquido (conduttore) raggiunge il valore h , il relè si chiude ed eccita il solenoide S collegato alla valvola di uscita V_2 . In tal modo V_2 si apre al massimo e consente il deflusso del liquido (fornito continuamente al serbatoio attraverso V_1), in modo da riportare il livello al valore prescritto, quando invece il livello diventa inferiore ad h , il relè si dischiude e determina la chiusura parziale o totale della valvola V_2 , in sostanza, regolando opportunamente l'apertura e la chiusura di V_2 , si fa in modo che il livello del liquido oscilli intorno al valore h prefissato.

Se invece il livello diventa inferiore ad h , il relè si dischiude e determina la chiusura parziale o totale della valvola V_2 , in sostanza, regolando opportunamente l'apertura e la chiusura di V_2 , si fa in modo che il livello del liquido oscilli intorno al valore h prefissato.

I sistemi di controllo lineari o continui realizzano in sostanza una regolazione continua della grandezza di uscita; ad esempio, un tipico ~~regolatore~~ continuo è un alimentatore stabilizzato.

I sistemi di controllo automatico ~~controlli~~ continui o lineari si differenziano a loro volta sia per il tipo di grandezza d'uscita Y , sia per il legame funzionale $Y=f[E(t)]$ tra la grandezza d'uscita $Y(t)$ ed il segnale di errore o di attuazione $E(t)$.

Rigetto al tipo di grandezza d'uscita fornita, i sistemi lineari di controllo automatico si distinguono in regolatori ^{e in servomeccanismi}. Se ha un regolatore Y deve essere mantenuta costante e quindi anche la grandezza di riferimento X è costante; un ~~esempio~~ ^{esempio} tipico è ~~un~~ ^{un} ~~elemento~~ ^{elemento} stabilizzato. Se invece Y è funzione del tempo e anche X è funzione del tempo, il sistema di controllo prende il nome di servomeccanismo o servosistema o asservimento; in tal caso si tratta di un sistema di controllo regolato che produce un'uscita ad alta potenza che deve seguire fedelmente l'andamento del corrispondente segnale d'ingresso $X(t)$. Inoltre, in base al legame $Y(E)$ i regolatori continui si distinguono in regolatori ^{ad azione} ~~proporzionale~~, se $Y(t)$ è proporzionale all'errore $E(t)$ e quindi per la variazione $\Delta Y(t) = K_p \Delta E(t)$ in regolatori ad azione derivativa, se $Y(t)$ è proporzionale alla derivata del segnale d'errore $E(t)$, e cioè $Y(t) = K_d \frac{dE(t)}{dt}$, e in regolatori ad azione integrale se $Y(t)$ è proporzionale all'integrale del segnale di errore, e cioè $Y(t) = K_i \int E(t) dt$, dove il segno - sta ad indicare la presenza della controazione o azione negativa. Nel caso generale di un regolatore ^{di tipo} P.I.D., cioè ad azione Proporzionale-Derivativa-Integrale, i tre addendati di $Y(t)$ contribuiscono con diverse modalità alla regolazione di Y , che è data pertanto dalla seguente espressione:

$$Y(t) = K_p E(t) + K_d \frac{dE(t)}{dt} + K_i \int E(t) dt.$$

Le tre azioni devono essere opportunamente dosate per non condurre il sistema all'instabilità. In particolare, il regolatore ad azione derivativa risponde soltanto alla rapidità di variazione della ~~uscita~~ ^{uscita} ~~errore~~ ^{errore} E , e quindi alle brusche variazioni di Y ; il regolatore proporzionale effettua la maggior parte della regolazione necessaria; infine il regolatore integrale perfeziona la regolazione compensando lo

scarto residuo tra la grandezza di uscita Y e la grandezza di riferimento X .

Struttura generale di un sistema di controllo automatico

Un sistema di controllo automatico è costituito essenzialmente (Fig. 3) da un blocco ~~segnale~~ di riferimento R , che fornisce al blocco sommatore S il segnale di riferimento X , che serve ad impostare il valore desiderato della grandezza di uscita Y , da un blocco amplificatore F (costituito da uno amplificatore di segnale e da un amplificatore finale di potenza), e da un trasduttore H , che ha la funzione di fornire al blocco sommatore S il segnale di reazione $Y_R = HY$, proporzionale al valore della grandezza di uscita Y .

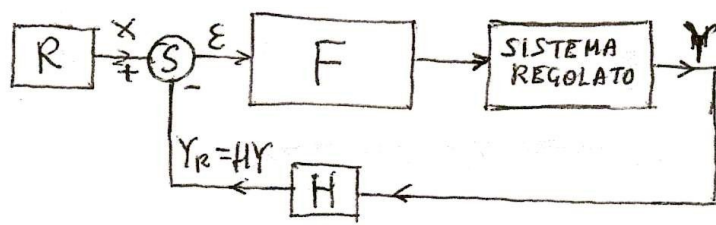
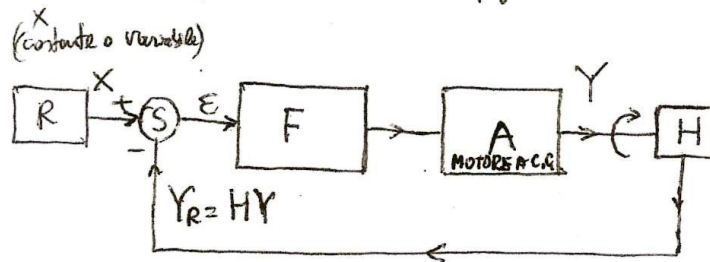


Fig. 3.

Se si tratta, ad esempio, di un regolatore di temperatura per un forno industriale, il sistema regolato è il forno di cui si vuol mantenere costante la temperatura T ad un valore prefissato, il blocco F è l'amplificatore di errore ~~che fornisce i segnali di pilotaggio ad~~ ^{alimentazione} ~~un sistema~~ di ~~monopoli o triac~~ ^{transistori o a triac} per la regolazione della potenza elettrica ~~che~~ ^{applicata} alla resistenza di riscaldamento del forno, H è costituito in pratica da un sistema di misura della temperatura del forno basato su termocoppie o su altri sensori di temperatura (termistori, resistori PTC, termometri resistivi al platino), R è un circuito di comando di variazione della tensione di riferimento X applicata al sommatore e di impostare in tal modo il valore di temperatura desiderato. Qualsiasi variazione della grandezza di uscita Y , che è la temperatura T del forno, determina un segnale di errore E , in base al quale viene variato l'angolo di conduzione dei

triac, in modo da aumentare o diminuire, a seconda dei casi, la potenza elettrica immessa e quindi riportare la temperatura al valore di regime.

Se si tratta invece di un servomeccanismo di posizione o di velocità, cioè di un servomeccanismo che consenta di ottenere uno spostamento ^{lineare o angolare} che abbia lo stesso andamento temporale del segnale di riferimento X , o di un servomeccanismo che consenta di ottenere una velocità di rotazione indipendente dal carico meccanico applicato ~~al motore~~, lo schema generale di controllo automatico è rappresentato in figura 4.



Servomeccanismo di posizione

Fig. 4

In questo caso il blocco R fornisce la tensione X di riferimento per l'impostazione della posizione angolare o lineare desiderata, F amplifica la tensione di errore e mediante un amplificatore finale di adeguata potenza o mediante un ~~poter~~ raddrizzatore a ponte a tiristori (se il motore è di grande potenza) fornisce la potenza continua di alimentazione a tensione variabile, al blocco attuatore A, che è costituito dal motore stesso. La grandezza controllata Y (posizione) viene convertita in tensione continua da un trasduttore potenziometrico lineare o angolare, o da un ~~simbolo~~ di segnale, ed inviata al blocco sommatore che fornisce al blocco F un segnale di errore E sempre più piccolo man mano che il motore si avvicina alla posizione impostata attraverso R. In fig. 5 si può osservare lo schema semplificato di un servomeccanismo di posizione impiegando un motore a corrente continua di piccola potenza, pilotato da un amplificatore operazionale di potenza (A_p), il trasduttore di posizione è un potenziometro rotativo alimentato a tensione costante. La tensione di reazione $Y_R = H*Y$ è data da $\frac{d\alpha}{dx} V_{PP}$, dove $d\alpha$ è l'angolo descritto dal cursore del potenziometro α partire dalla posizione iniziale e α è l'ampiezza angolare totale dell'arcamento esistente.

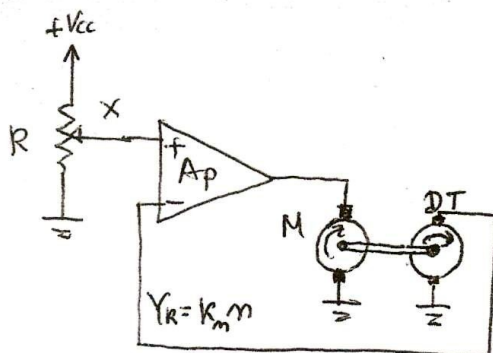


Fig. 6

la dinamo tachimetrica fornisce un segnale di reazione tale da far diminuire o aumentare la tensione d'armatura del motore e quindi da compensare, con la conseguente opposta variazione di velocità, la variazione di velocità dovuta alla variazione del carico meccanico.

In questo caso si è ottenuto un controllo automatico di velocità ad anello chiuso, in quanto il segnale di controreazione fornito dalla dinamo tachimetrica DT consente di mantenere costante la velocità di rotazione (grandezza di uscita del sistema controllato) contro tutti i disturbi esterni, rappresentati in questo caso da variazioni di carico, il che non sarebbe possibile se venisse introdotto l'anello di reazione per realizzare in tal modo un controllo (variante) di velocità ad anello aperto. Infatti la controreazione consente di rendere minima l'influenza di tutte le cause esterne tendenti a perturbare il sistema. Sia infatti $F(s)$ la funzione di trasferimento del blocco amplificatore della tensione di errore E ; se vogliamo calcolare il valore dell'uscita a regime, corrispondente ad un segnale di riferimento X dato da un gradino di ampiezza X_i , applichiamo il teorema del valore finale, noto dalle forme della trasformata di Laplace:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) ; \quad \text{ma } Y(s) = E(s) F(s)$$

$$\text{con } E(s) = X(s) - Y_R(s) \quad Y_R(s) = H(s) Y(s)$$

$$\text{pertanto } Y(s) = [X(s) - H(s) Y(s)] F(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s) F(s)}{1 + H(s) F(s)}$$

$F(s)$ e $H(s)$ sono rispettivamente le funzioni di trasferimento del blocco amplificatore ad anello aperto F e del blocco di reazione H ; il termine $H(s) F(s)$ prende il nome di guadagno d'anello.

Si definisce inoltre funzione di trasferimento ad anello chiuso $F_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F(s)}{1 + H(s) F(s)}$

$F(s)$ e $H(s)$ nel caso più generale si possono scrivere come funzioni razionali fratte di s con m poli e n zeri con $n < m$ affinità.

Es:
$$F(s) = \frac{K (s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)}$$
 il lim di $F(s)$ tende a zero

$$= \frac{K z_1 z_2 \dots z_m \left(\frac{s}{z_1} - 1\right) \left(\frac{s}{z_2} - 1\right) \dots \left(\frac{s}{z_m} - 1\right)}{p_1 p_2 \dots p_m \left(\frac{s}{p_1} - 1\right) \left(\frac{s}{p_2} - 1\right) \dots \left(\frac{s}{p_m} - 1\right)}$$

Però il lim di $F(s) = K \frac{z_1 z_2 \dots z_m (-1)^m}{p_1 p_2 \dots p_m (-1)^m} = K_0$, dove K_0

prende il nome di guadagno statico del sistema.

Definito $K_0 H_0$, procediamo al calcolo della risposta a regime del sistema all'eccitazione $X = X_0$ (gradino di ampiezza X_0):

$$Y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{X(s) F(s)}{1 + H(s) F(s)} = \frac{s X_0 K_0}{s(1 + H_0 K_0)} = \frac{K_0 X_0}{1 + H_0 K_0}$$

, avendo $X(s) = \frac{X_0}{s}$.

Se in particolare $K_0 H_0 \gg 1$ $Y(\infty) = \frac{X_0}{H_0}$.

Il prodotto $K_0 H_0$ prende il nome di guadagno statico d'anello. Facendo riferimento alla fig. 7 calcoliamo l'effetto di un disturbo Y_N presente all'uscita, dovuto ad esempio ad una variazione di carico che determina una variazione di velocità del motore.

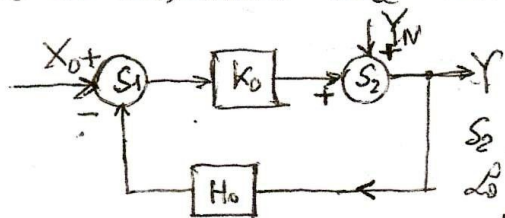


Fig. 7

È stato aggiunto un sommatore S_2 in uscita per tener conto di Y_N . Lo schema serve a calcolare l'effetto a regime del disturbo Y_N , annullando X_0 in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, in quanto il sistema è lineare. Supponendo infatti $X_0 = 0$:

$$Y = Y_N + K_0 H_0 Y \rightarrow Y = \frac{Y_N}{1 + K_0 H_0}$$

partendo l'effetto a regime del disturbo Y_N è tanto più piccolo quanto maggiore è il guadagno statico d'anello $K_0 H_0$, il

che richiede un'amplificazione molto elevata per il blocco F , non sempre compatibile con la stabilità del sistema di controllo, che tende ~~ad~~ ad oscillare. Troviamo così che la controreazione consente di aumentare il rapporto segnale/disturbo ~~del~~ del sistema realizzato rispetto al corrispondente sistema ad anello aperto; infatti l'effetto dovuto al disturbo (a regime) è $\frac{1}{1+K_0}$ volte più piccolo nel sistema ad anello chiuso rispetto al sistema ad anello aperto.

Classificazione dei sistemi di controllo automatico

I sistemi di controllo automatico vengono classificati in base all'errore a regime commesso quando al sistema realizzato si applicano le principali eccitazioni (gradino, rampa, parabola); si determina in sostanza l'errore a regime con cui il sistema realizzato riproduce in uscita il segnale applicato all'ingresso.

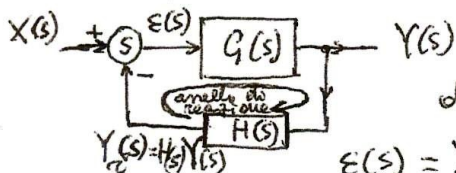
Consideriamo un sistema di controllo automatico caratterizzato da una funzione di trasferimento dell'anello ~~per~~ di ragione data da

$$(*) \quad G(s)H(s) = \frac{K_0 (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + 1)}{s^h (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + 1)} = K_0 \frac{B(s)}{s^h A(s)},$$

dove K_0 è il guadagno statico dell'anello di ragione per $s=0$

$$(K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s))$$

Affinché sia ~~costante o finito~~ il limite di $G(s)H(s)$ per $s \rightarrow \infty$ deve essere $m \leq n$, inoltre si considera la presenza di un polo s^h di molteplicità h nell'origine del piano complesso della variabile s .



Consideriamo pertanto l'espressione dell'errore $E(s)$ a regime:

$$E(s) = X(s) - Y(s) = X(s) - H(s)Y(s), \quad Y(s) = E(s)G(s)$$

$$E(s) = X(s) - H(s)G(s)E(s)$$

$$E(s) = \frac{X(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$E(s)$ è la $\mathcal{L}$ -trasformata dell'errore $e(t)$

(*) $G(s)$ corrisponde a $F(s)$ nella notazione a blocchi di Fig. 1; infatti $Y(s) = F(s)G(s)$.

Per calcolare il valore di $\varepsilon(s)$ a regime applichiamo il teorema del valore finale, noto dalla teoria della trasformata di Laplace:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s X(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Sistemi di tipo zero

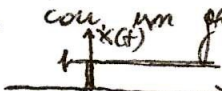
Un sistema di controllo ^{automatico} viene classificato di tipo zero o di ordine zero se $h=0$, cioè se nella funzione di trasferimento $G(s)H(s)$ non figura la funzione di trasferimento $\frac{1}{s^h}$ tipica dell'integratore di ordine h

$$\int \dots \int_0^{\infty} V(t) dt_1 dt_2 \dots dt_h = \int dt_1 \int dt_2 \dots \int V(t) dt_h.$$

h volte

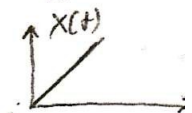
Pertanto il sistema è di tipo zero se $G(s)H(s) = K_0 \frac{B(s)}{A(s)}$.

Consideriamo adesso gli errori a regime relativi alle varie eccitazioni.

Se eccitiamo il sistema con un gradino unitario $x(t)=1$, cioè con un gradino di ampiezza 1,  $X(s) = \frac{1}{s}$, e si ha:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{1 + K_0 \frac{B(s)}{A(s)}} = \frac{1}{1 + K_0}, \text{ essendo uguale a 1 il limite di } \frac{B(s)}{A(s)} \text{ per } s \rightarrow 0.$$

L'errore a regime $\varepsilon(\infty)$ è quindi tanto più piccolo quanto maggiore è il guadagno statico d'anello K_0 .

Se eccitiamo il sistema con una rampa unitaria $x(t)=t$, 

$$X(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{e} \quad \varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + K_0 \frac{B(s)}{A(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s}}{1 + K_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1 + K_0)} = \infty$$

L'errore a regime è infinito, il che significa che il sistema non risponde con sufficiente rapidità al segnale d'ingresso a rampa, e che non è pertanto in grado di regimare l'aumento in funzione del tempo.

Analogo risultato si ottiene eccitando il sistema con una parabola unitaria $x(t)=t^2$,  infatti $X(s) = \frac{2}{s^3}$ e

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{2}{s^3}}{1 + K_0 \frac{B(s)}{A(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{s^2}}{1 + K_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2(1 + K_0)} = \infty$$

Sistema di tipo 1

Un sistema viene classificato di tipo 1 se $h=1$, cioè se $G(s)H(s) = \frac{K_0}{s} \frac{B(s)}{A(s)}$ il che significa che nella funzione di trasferimento dell'anello di reazione $G(s)H(s)$ è presente un integratore di ordine 1 ($\int v(t) dt$).

Se eccitiamo il sistema con un gradino unitario $X(t)=1$, la trasformata $X(s) = \frac{1}{s}$, otteniamo:

$$E(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K_0}{s} \frac{B(s)}{A(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K_0}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{K_0 + s} = 0$$

Pertanto l'errore a regime è nullo e il sistema risponde meglio al gradino unitario rispetto al sistema di tipo zero.

[essendo uguale a 1 il limite di $\frac{B(s)}{A(s)}$ per $s \rightarrow 0$]

Se $X(t) = t$ (rampa unitaria), $X(s) = \frac{1}{s^2}$

$$E(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{K_0}{s} \frac{B(s)}{A(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{K_0}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K_0 + s} = \frac{1}{K_0}$$

Se $X(t) = t^2$ (parabola unitaria), $X(s) = \frac{2}{s^3}$

$$E(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{2}{s^3}}{1 + \frac{K_0}{s} \frac{B(s)}{A(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{s^2}}{1 + \frac{K_0}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{s^2}}{\frac{K_0 + s}{s}} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s}{K_0 + s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2 + K_0 s} = \infty$$

Evidentemente il sistema di tipo 1 non riesce a seguire con sufficiente rapidità l'eccitazione parabolica, e quindi l'errore a regime è infinito.

Sistema di tipo 2

Un sistema viene classificato di tipo 2 se $h=2$, cioè se $G(s)H(s) = \frac{K_0}{s^2} \frac{B(s)}{A(s)}$ il che significa che nella funzione di trasferimento dell'anello di reazione $G(s)H(s)$ è presente un doppio integratore ($\iint v(t) dt_1 dt_2$) (di ordine 2).

Se si eccita il sistema con un gradino unitario $X(t) = 1$, con L-transformata $X(s) = \frac{1}{s}$, si ha:

$$E(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K_0}{s^2} \frac{B(s)}{A(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K_0}{s^2}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s^2 + K_0} = 0$$

Se si eccita il sistema con una rampa unitaria $X(t) = t$, con

L-transformata $X(s) = \frac{1}{s^2}$, si ha:

$$E(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{K_0}{s^2} \frac{B(s)}{A(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{K_0}{s^2}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s}}{\frac{K_0 + s^2}{s^2}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2}{K_0 + s^2} = 0$$

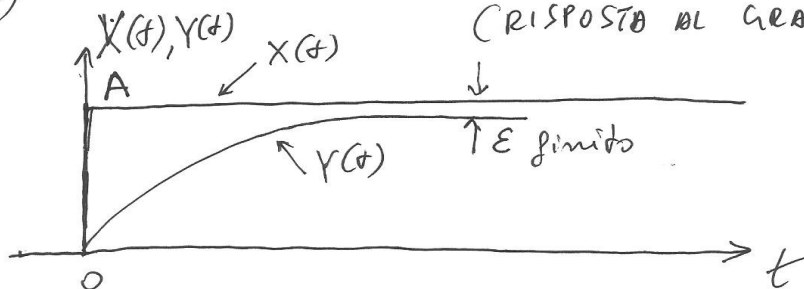
Pertanto si può notare che la presenza di un integratore doppio determina un netto miglioramento delle risposte a regime alle rampa unitaria, rispetto al sistema di tipo 1, per il quale l'errore è costante e pari a $\frac{1}{K_0}$.

Se si eccita il sistema con una parabola unitaria $X(t) = t^2$, con L-transformata $X(s) = \frac{2}{s^3}$, si ha:

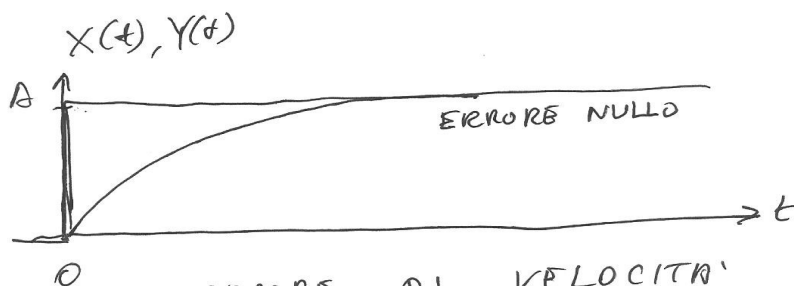
$$E(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{2}{s^3}}{1 + \frac{K_0}{s^2} \frac{B(s)}{A(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{s^2}}{1 + \frac{K_0}{s^2}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s^2}{K_0 + s^2} = \frac{2}{K_0}$$

Il sistema di tipo 2 risponde meglio del sistema di tipo 1 all'eccitazione parabolica, anche se con insufficiente prontezza; per ottenere un errore nullo a regime bisognerebbe evidentemente impiegare un sistema di tipo 3, con ~~un~~ integratore triplo. Tuttavia in pratica si impiegano raramente sistemi di tipo 3, in quanto la loro stabilità è alquanto critica.

1) ERRORE DI POSIZIONE (RISPOSTA AL GRADINO)

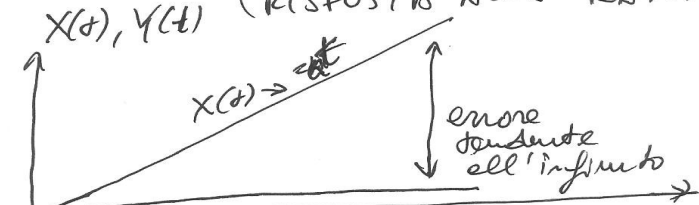


SISTEMA DI TIPO ZERO
 $X(s) = \frac{A}{s}$
 $G(s)H(s) = K_0 \frac{B(s)}{A(s)}$
 $E(\infty) = \frac{A}{1+K_0}$

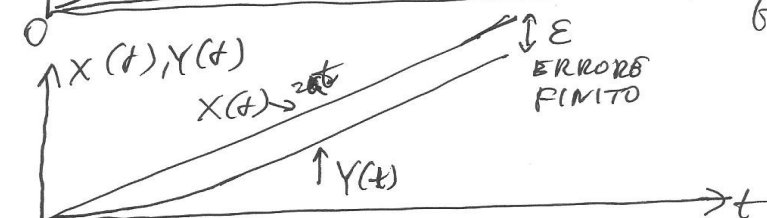


SISTEMA DI TIPO UNO (O DUE)
 $X(s) = \frac{A}{s}$
 $G(s)H(s) = \frac{K_0}{s} \frac{B(s)}{A(s)}$
 $E(\infty) = 0$

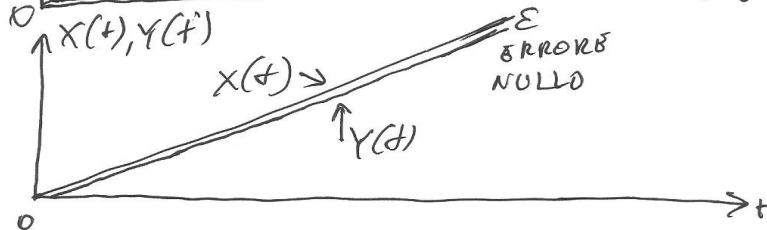
2) ERRORE DI VELOCITA' (RISPOSTA ALLA RAMPA)



SISTEMA DI TIPO ZERO
 $X(s) = \frac{a}{s^2}$; $G(s)H(s) = K_0 \frac{B(s)}{A(s)}$
 $E(\infty) = \infty$

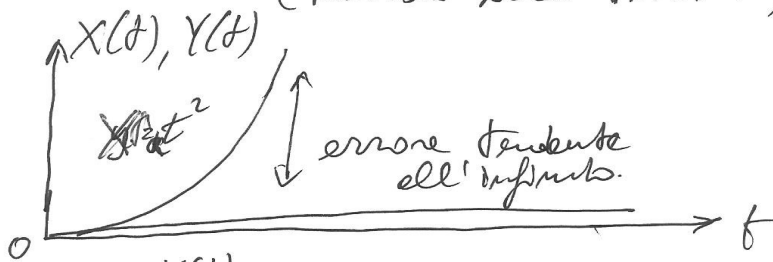


SISTEMA DI TIPO UNO
 $X(s) = \frac{a}{s^2}$; $G(s)H(s) = \frac{K_0}{s} \frac{B(s)}{A(s)}$
 $E(\infty) = \frac{a}{K_0}$

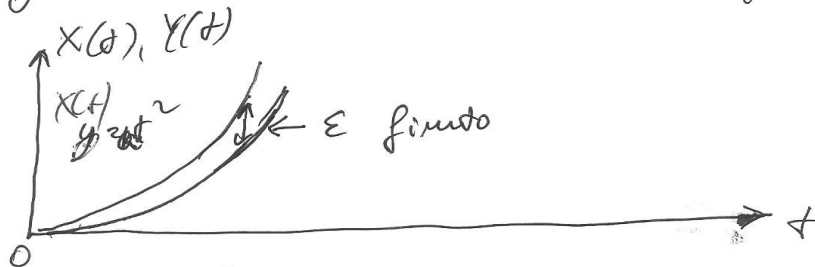


SISTEMA DI TIPO DUE
 $X(s) = \frac{a}{s^2}$; $G(s)H(s) = \frac{K_0}{s^2} \frac{B(s)}{A(s)}$
 $E(\infty) = 0$

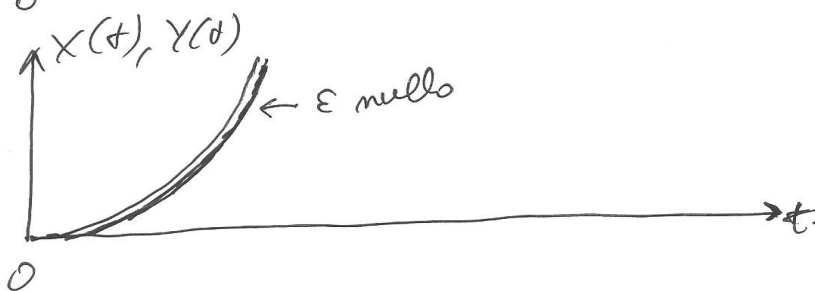
3) ERRORI DI ACCELERAZIONE (RISPOSTA ALLA PARABOLA)



SISTEMI DI
TIPO ZERO
0 UNO; $X(s) = \frac{2a}{s^3}$
 $E(\infty) = \infty$



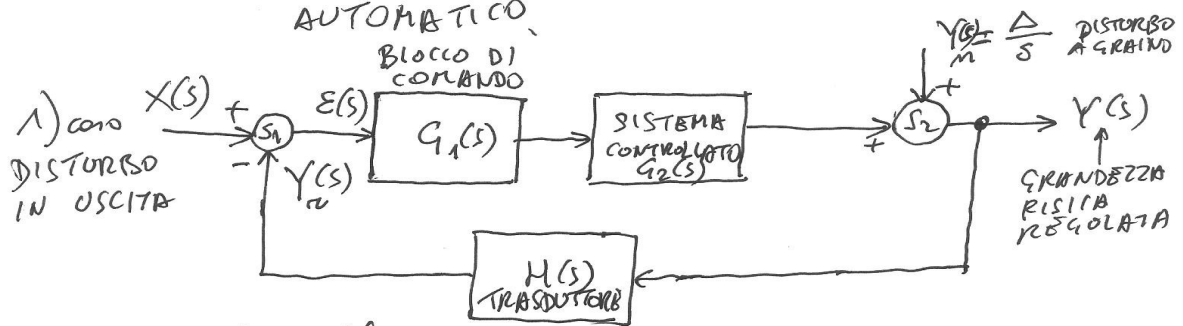
SISTEMI DI
TIPO UNO
 $X(s) = \frac{2a}{s^3}$ | $G(s)H(s) = \frac{K_0 A(s)}{s^2 B(s)}$
 $E(\infty) = \frac{2a}{K_0}$



$G(s)H(s) = \frac{K_0 A(s)}{s^3 B(s)}$
SISTEMI DI
TIPO DUE
 $X(s) = \frac{2a}{s^3}$
 $E(\infty) = 0$

DISTURBI NEI SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO

1



si applica il
Principio di sovrapposizione degli effetti.

$$Y(s) = Y_m(s) + E(s) G_1(s) G_2(s)$$

$$E(s) = X(s) - Y(s) H(s) = X(s) - H(s) Y(s)$$

$$Y(s) = Y_m(s) + [X(s) - H(s) Y(s)] G_1(s) G_2(s)$$

$$Y(s) + G_1(s) G_2(s) H(s) Y(s) = Y_m(s) + X(s) G_1(s) G_2(s)$$

$$Y(s) [1 + G_1(s) G_2(s) H(s)] = Y_m(s) + X(s) G_1(s) G_2(s)$$

$$Y(s) = \frac{Y_m(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} + \frac{X(s) G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)}$$

Se poniamo $X(s) = 0$ e prendiamo $X(s) = 0$; appare solo $Y_m(s) = \frac{\Delta}{s}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) =$$

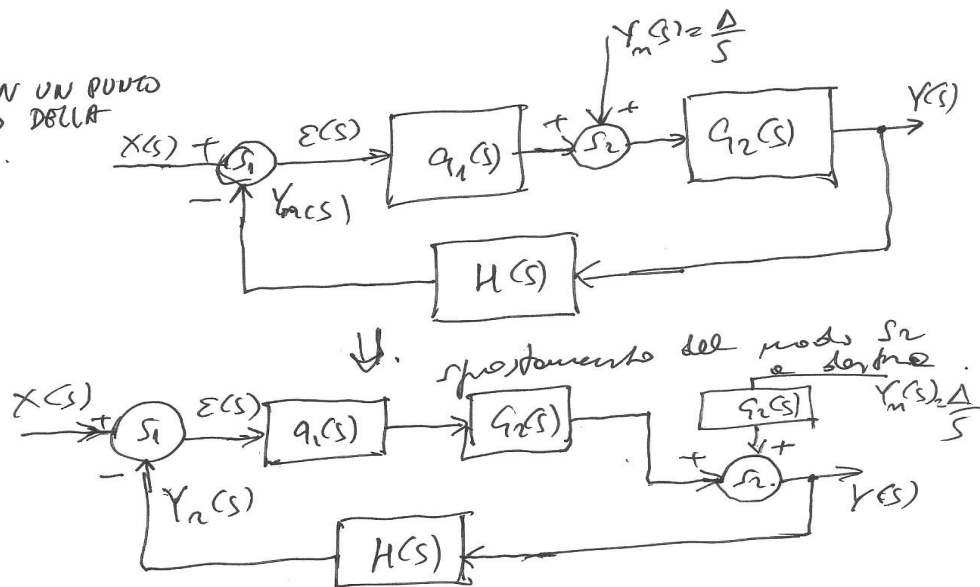
$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s Y_m(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{\Delta}{s}}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} =$$

$$= \frac{\Delta}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)}$$

Se il sistema è $\frac{1}{s}$ (o di tipo 1) $I(s) = \frac{k}{s}$
 il guadagno $Q_1(s) Q_2(s) H(s) I(s) = \frac{k Q_1(s) Q_2(s) H(s)}{s}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s Y_m(s)}{1 + \frac{k Q_1(s) Q_2(s) H(s)}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{\Delta}{s}}{1 + \frac{k Q_1(s) Q_2(s) H(s)}{s}} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta}{1 + \frac{k Q_1(s) Q_2(s) H(s)}{s}} = 0 \quad \text{a regime} \end{aligned}$$

2) caso
 DISTURBO IN UN PUNTO
 INTERMEDIO DELLA
 CATENA.



3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot Y_m(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} =$$

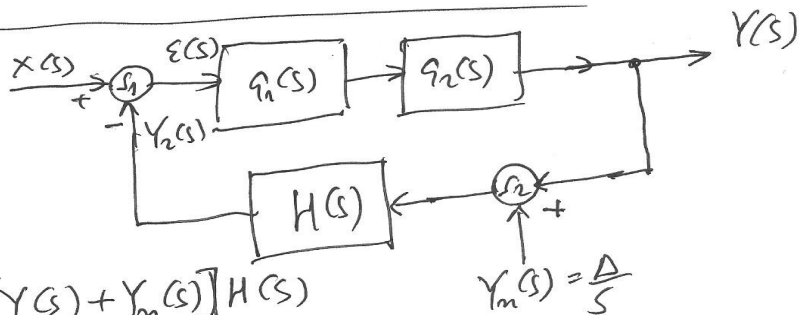
$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{\Delta}{s} G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} = \frac{\Delta G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)}$$

Se il sistema è di tipo 1 con il polo $\frac{1}{s}$ esterno a $G_2(s)$, in base a $\Delta G_2(s)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta G_2(s)}{1 + \frac{G_1(s) G_2(s) H(s) \cdot K}{s}} = 0$$

3) caso

DISTURBO
ALL'INGRESSO DEL
TRASDUTTORE



$$Y_2(s) = [Y(s) + Y_m(s)] H(s)$$

$$Y_m(s) = \frac{\Delta}{s}$$

$$Y(s) = G_1(s) G_2(s) E = G_1(s) G_2(s) [X(s) - Y_2(s)]$$

$$Y(s) = G_1(s) G_2(s) X(s) - G_1(s) G_2(s) [Y(s) + Y_m(s)] H(s)$$

$$Y(s) + G_1(s) G_2(s) Y(s) H(s) = G_1(s) G_2(s) X(s) - G_1(s) G_2(s) H(s) Y_m(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s) G_2(s) X(s) - G_1(s) G_2(s) H(s) Y_m(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)}$$

S

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) =$$

2

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s G_1(s) G_2(s) H(s) \cdot \frac{\Delta}{s}}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\Delta G_1(s) G_2(s) H(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)}$$

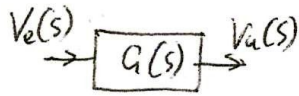
Se il sistema è di tipo 1.
(pole $\frac{1}{s}$ e zero $G_2(s)$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{\Delta G_1(s) G_2(s) H(s)}{1 + \frac{G_1(s) G_2(s) H(s) K}{s}} = 0$$

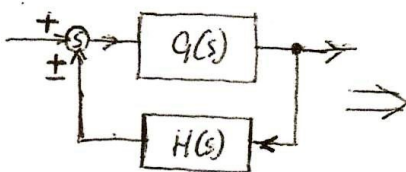
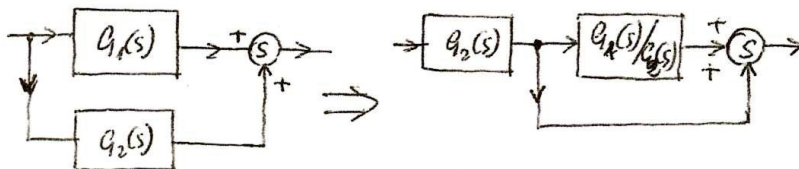
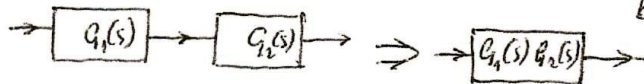
6

Semplificazione degli schemi a blocchi dei sistemi di controllo automatico.

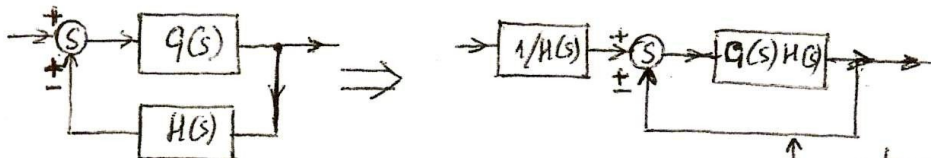
14



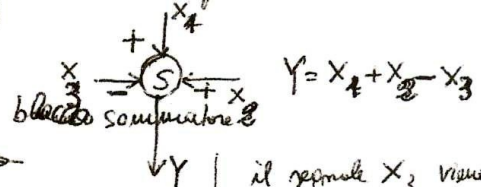
$G(s) = \frac{V_a(s)}{V_2(s)}$ ($G(s)$ è definita dal rapporto delle trasformate $V_a(s)$ e $V_2(s)$, funzione di trasferimento)



il segno + all'ingresso del sommatore s del ~~ris~~ corrisponde alla reazione positiva, il segno - alla reazione negativa

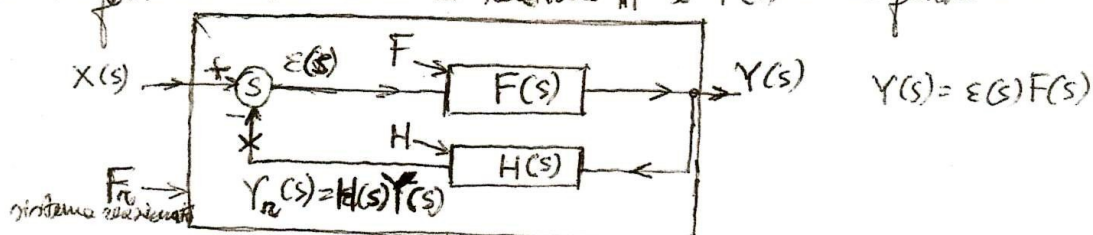


retrasmissione diretta (il segnale d'uscita ritorna integralmente all'ingresso)



il segnale x_3 viene invertito dal blocco sommatore ed aggiunto a $x_1 + x_2$, in quanto è presente il segno - accanto al punto d'ingresso x_3 .

Consideriamo un sistema di controllo automatico, ad esempio un servomotore (servomeccanismo di posizione), che sia caratterizzato da una funzione di trasferimento $F(s)H(s)$ dell'anello di reazione, stabile e priva di poli con parte reale positiva (infatti la presenza di poli con parte reale positiva determina risposte divergenti, ad esempio risposte sinusoidali di ampiezza crescente con legge esponenziale ~~AAA~~). La funzione di trasferimento $F_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ del sistema reazionato ad anello chiuso è data dall'espressione $F_c(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)H(s)}$, dove $H(s)$ è la funzione di trasferimento del blocco di reazione H e $F(s)$ è la funzione di



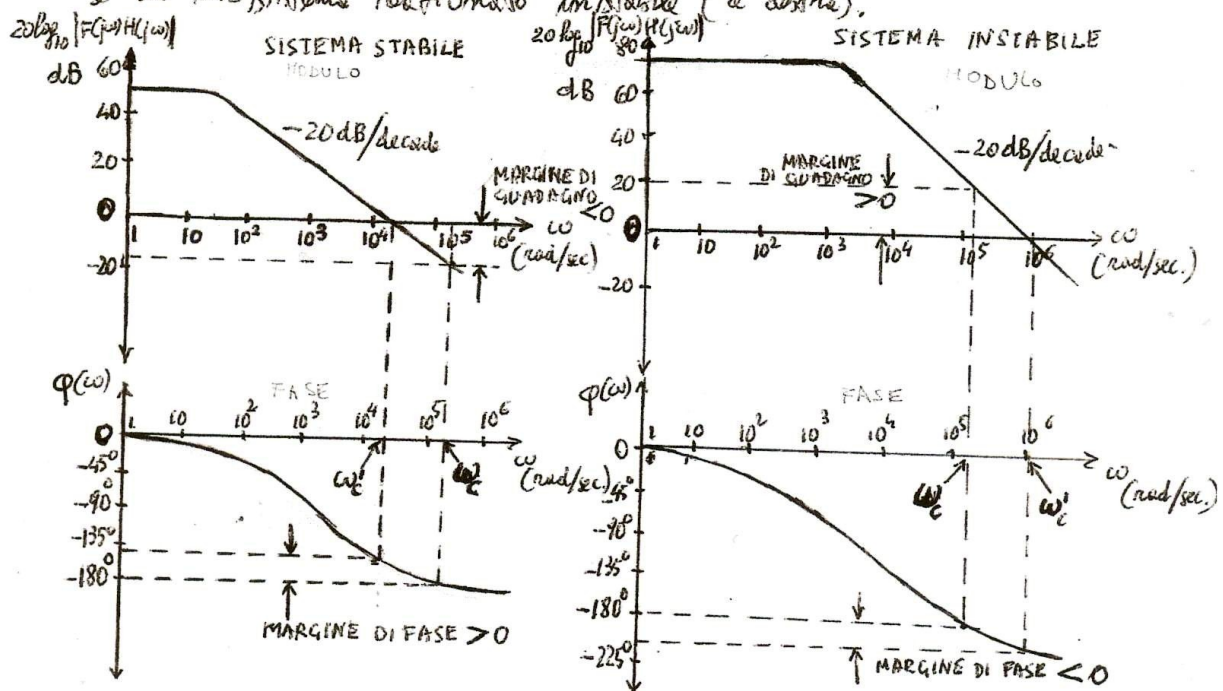
trasferimento del blocco amplificatore ~~è~~ F . La stabilità di $F(s)H(s)$ non implica la stabilità di $F_c(s)$, pertanto bisogna ~~interrompere~~ ricorrere ad opportuni criteri che, dalla conoscenza della funzione $F(s)H(s)$, ci consentano di dedurre la stabilità del sistema reazionato F_c . Si tratta in sostanza di stabilire analiticamente quando il sistema reazionato oscilla e diventa pertanto instabile. Supponiamo di interrompere l'anello di reazione nel punto contrassegnato dalla crocetta x , il sistema oscilla quando il segnale di reazione ~~invertito di fase~~ $-Y_r(t)$ coincide in frequenza, ampiezza e fase con il segnale $X(t)$ d'ingresso. Quando l'anello di reazione è interrotto, $E(s) = X(s)$, $Y_r(s) = H(s)Y(s) = H(s)F(s)X$ essendo $Y(s) = F(s)E(s) = F(s)X(s)$; pertanto, tenendo conto dell'inversione di fase operata dal blocco sommatore S (segno - all'ingresso del segnale di reazione), si ha la seguente condizione di oscillazione, valida in generale per qualsiasi amplificatore a retroazione, ed in particolare per i sistemi di controllo automatico:

$$X(s) = -Y_r(s), \quad X(s) = -H(s)F(s)X(s), \quad \text{cioè} \quad F(s)H(s) = -1.$$

Quando è soddisfatta questa condizione, la reazione da negativa diventa positiva e la rotazione di fase complessiva lungo l'anello di reazione è nulla o pari a multipli di 360° , e il modulo del guadagno d'anello

$|F(s)H(s)|$ è uguale a 1; in sostanza, passando al dominio della pulsazione ω , si ha: $F(j\omega)H(j\omega) = -1$ che equivale a dire

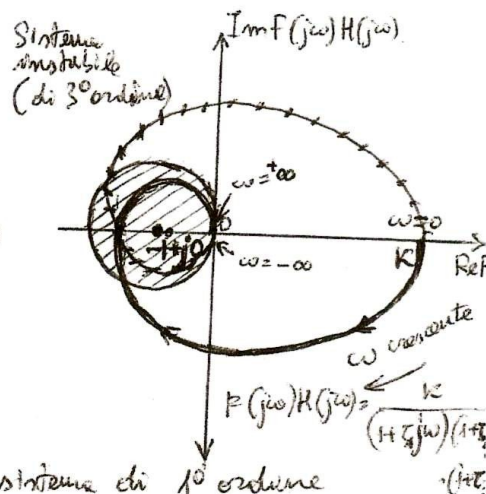
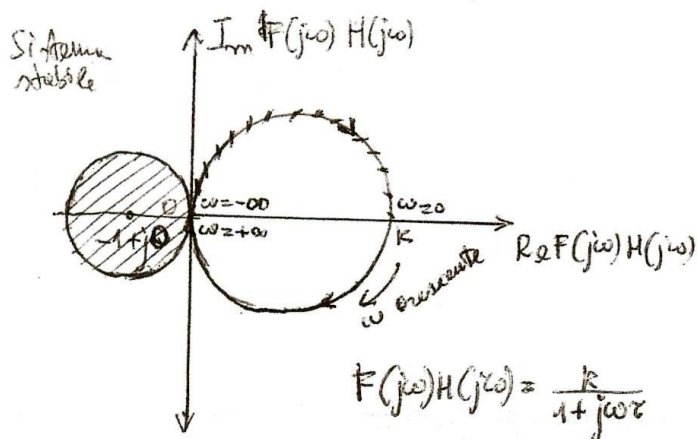
che il sistema oscilla quando la funzione di trasferimento del guadagno d'anello $F(j\omega)H(j\omega)$ è un numero complesso di modulo 1 e fase -180° (la rotazione di fase di -180° , alla frequenza di oscillazione, si somma alla rotazione di fase di 180° del sommatore, dando 0°). Esistono due criteri di stabilità: il primo fa riferimento ai diagrammi di Bode, l'altro al diagramma di Nyquist di $F(j\omega)H(j\omega)$. Osserviamo nella seguente figura i diagrammi di Bode di un sistema razionale stabile (a sinistra) e di un sistema razionale instabile (a destra).



Affinché il sistema sia stabile, il modulo di $F(j\omega)H(j\omega)$ deve essere minore di 1 alla pulsazione ω in corrispondenza della quale $\phi(\omega) = -180^\circ$; pertanto, in un sistema stabile, il margine di guadagno, definito dalla relazione $MG = 20 \log_{10} |F(j\omega_c)H(j\omega_c)|$, deve essere negativo e pari almeno a -10 dB.
(ω_c sta per critica - pulsazione critica)

Accanto al margine di guadagno MG si definisce il margine di fase $M\phi$; infatti, affinché il sistema sia stabile, la fase $\phi(\omega')$ deve essere minore, in valore assoluto, di 180° alla frequenza ω' in corrispondenza della quale il modulo di $F(j\omega)H(j\omega)$ diventa uguale a 1; pertanto, in un sistema stabile il margine di fase $M\phi = 180^\circ - |\phi(\omega')|$ deve essere positivo e pari almeno a 45° .

Consideriamo adesso i diagrammi di Nyquist di un sistema stabile (a sinistra) e di un sistema instabile (a destra).



Il diagramma di sinistra è quello di un sistema di 1° ordine parte b) ed è stato ottenuto completando il diagramma effettivo con una semicirconferenza corrispondente a pulsazioni negative (tecnicamente non significative) ($-\infty < \omega < 0$), considerata allo scopo di ottenere un diagramma chiuso e poter così contare i giri compiuti attorno al punto critico $-1 + j0$, che è il centro di una circonferenza di spartizione (nel piano complesso) $|1 + F(j\omega)H(j\omega)| = 1$. Infatti $(1 + \text{Re} FH)^2 + (\text{Im} FH)^2 = 1$

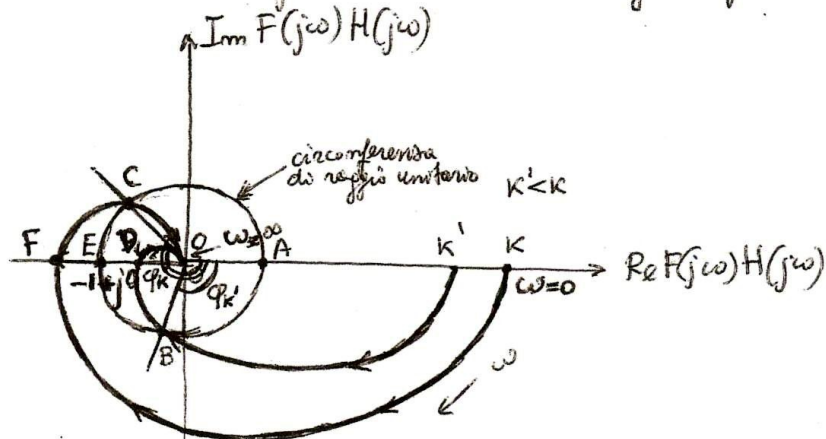
$$|1 + \text{Re} FH + j \text{Im} FH| = 1 \Rightarrow \sqrt{(1 + \text{Re} FH)^2 + (\text{Im} FH)^2} = 1$$

è proprio l'equazione di una circonferenza di centro $(\text{Re} FH = -1, \text{Im} FH = 0)$

Nei punti interni alla circonferenza critica la reazione è positiva, in quanto in tali punti $|1 + FH| < 1$, nei punti esterni la reazione è negativa avendo $|1 + FH| > 1$. Infatti, quando $|1 + FH| < 1$ $|F_d| = \frac{|F|}{|1 + FH|} > |F|$ (reazione positiva) quando invece $|1 + FH| > 1$ $|F_d| = \frac{|F|}{|1 + FH|} < |F|$ (reazione negativa)

Se il diagramma di Nyquist attraversa la circonferenza critica senza girare attorno al punto critico, c'è reazione positiva, nei punti della regione tratteggiata, ma il sistema è stabile e non oscilla.

Nella seguente figura sono stati disegnati i diagrammi di Nyquist di una funzione $F(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(1+\tau_1 j\omega)(1+\tau_2 j\omega)(1+\tau_3 j\omega)}$ relativa ad un sistema d'ordine 3° a stabilità condizionata, dipendente dal valore del guadagno statico K (per $\omega=0$).



Il sistema con guadagno K' è stabile; infatti il margine di fase $M\varphi = 180^\circ - |\varphi_{K'}| = 180^\circ - |\widehat{AOB}|$ è positivo, e il margine di guadagno

$$M_G = 20 \log_{10} \frac{|OD|}{|OE|} = 20 \log_{10} |OD| \text{ è negativo, essendo } |OD| < 1.$$

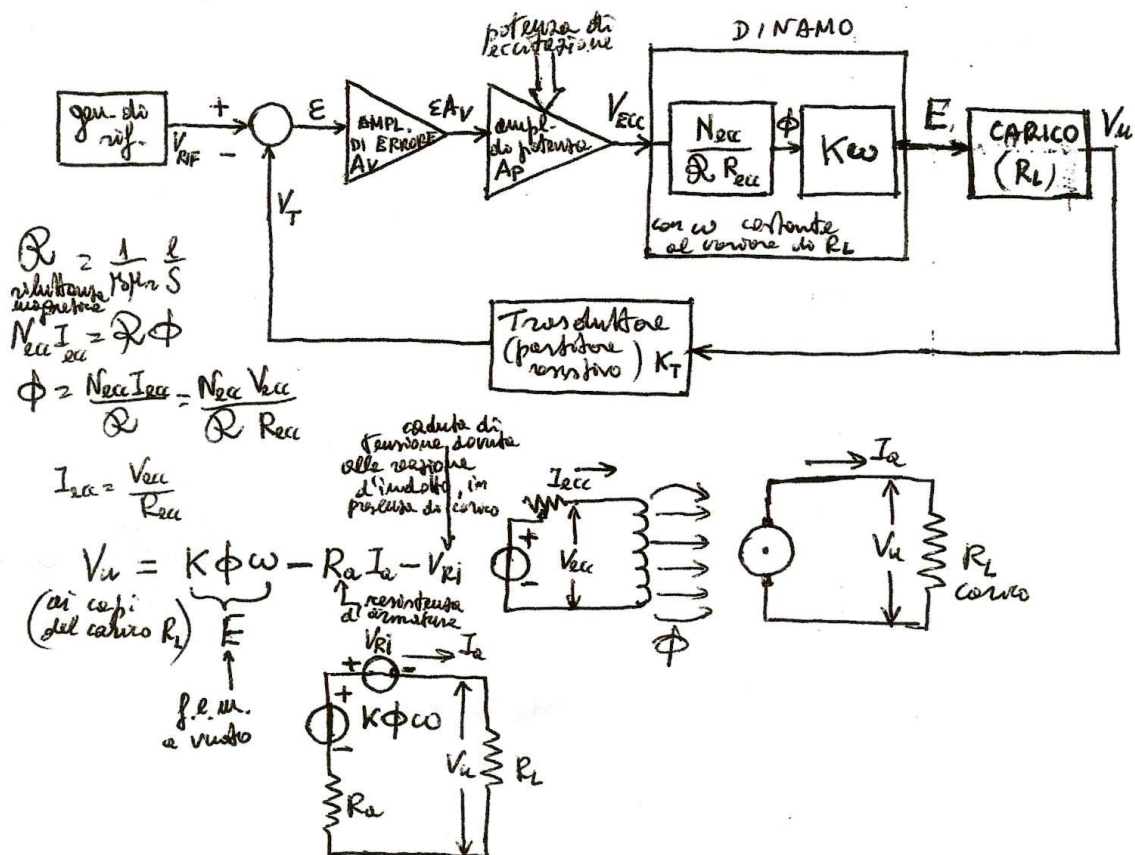
$|OE| = 1$

Il sistema con guadagno K è invece instabile; infatti il margine di fase $M\varphi = 180^\circ - |\varphi_K| = 180^\circ - |\widehat{AOC}|$ è negativo, essendo $|\widehat{AOC}| > 180^\circ$, e il margine di guadagno $M_G = 20 \log_{10} \frac{|OF|}{|OE|} = 20 \log_{10} |OF|$ è positivo, essendo $|OF| > 1$.

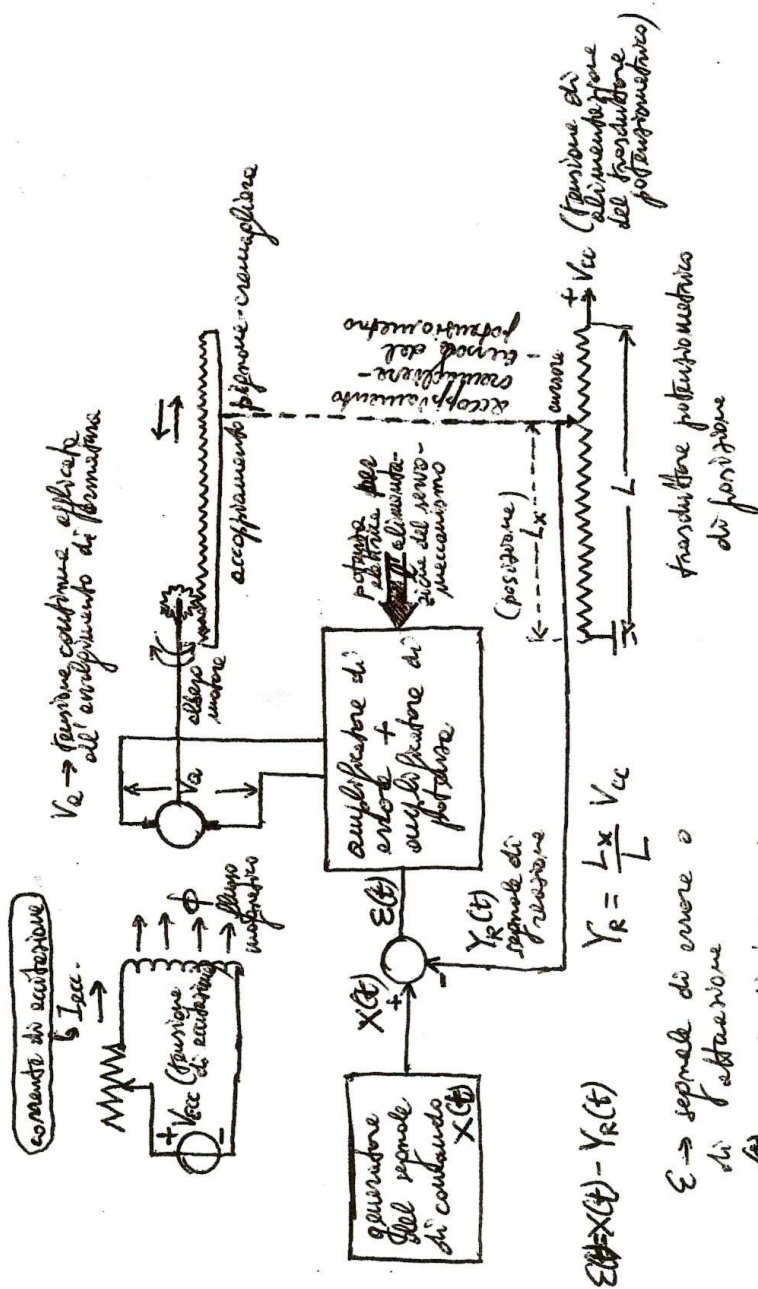
Per il sistema con guadagno $K' < K$, l'arco di diagramma compreso tra l'origine del piano complesso e il punto B corrisponde a pulsazioni ω caratterizzate da presenza di reazione positiva; il sistema è tuttavia stabile in quanto il diagramma non attraversa il punto critico $-1+j0$.

La stabilizzazione di un sistema automatico si effettua aggiungendo al sistema reti RC anticipatrici di fase, che riducono il valore assoluto della fase in modo che $|\varphi(\omega)|$ sia minore di 180° alla frequenza per cui $|F(j\omega)H(j\omega)| = 1$, o alternativamente reti ritardatrici, che riducono il valore del modulo di $F(j\omega)H(j\omega)$ in modo che esso diventi minore di 1 alla frequenza per cui $\varphi(\omega) = 180^\circ$.

Regolazione della tensione di una dinamo al variare del carico R_L



Servomeccanismo di posizione con motore a corrente continua ed eccitazione indipendente

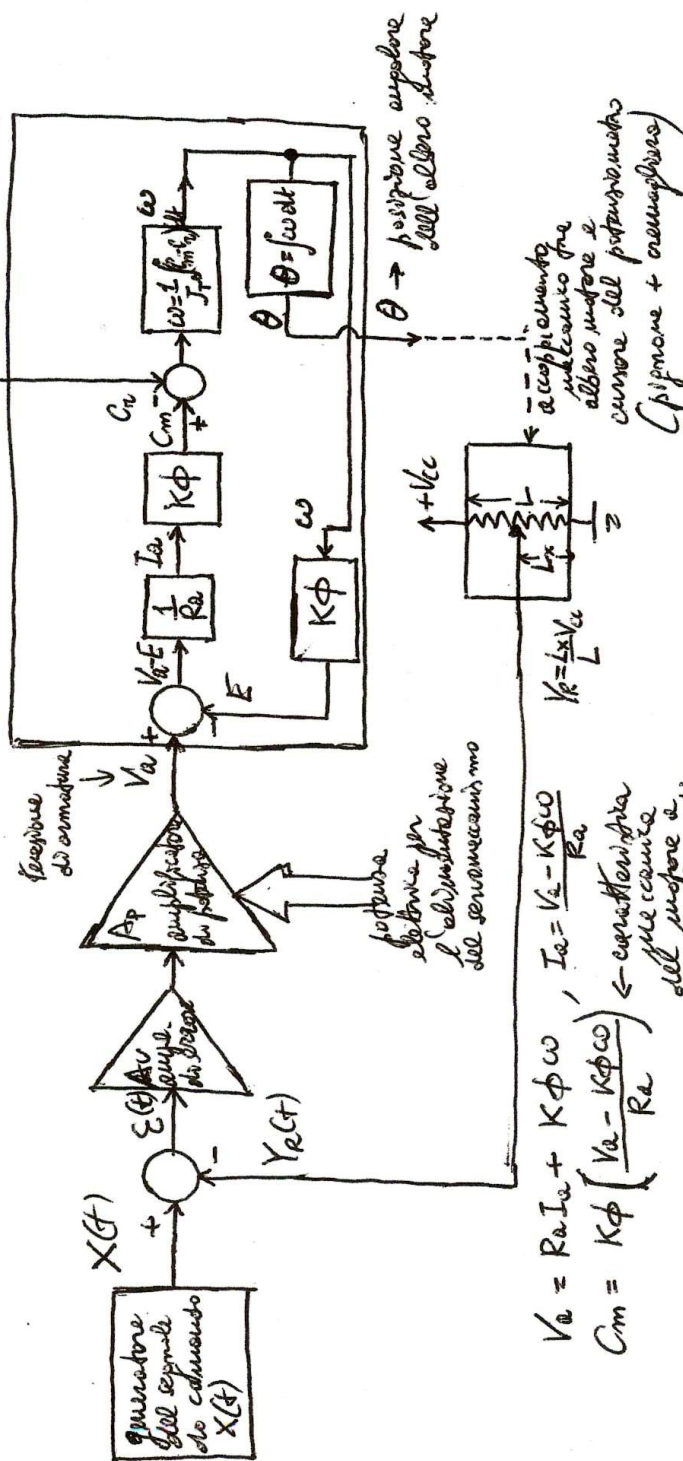


$E \rightarrow$ segnale di errore o di feedback

$X(t)$ segnale di ingresso per il comando del servomeccanismo

Schemi a blocchi di un servomeccanismo di posizione (azionamento di posizione) indipendente un motore a corrente continua con eccitazione indipendente

SCHEMA A BLOCCHI DEL MOTORE A.C.C.



equazione differenziale del sistema

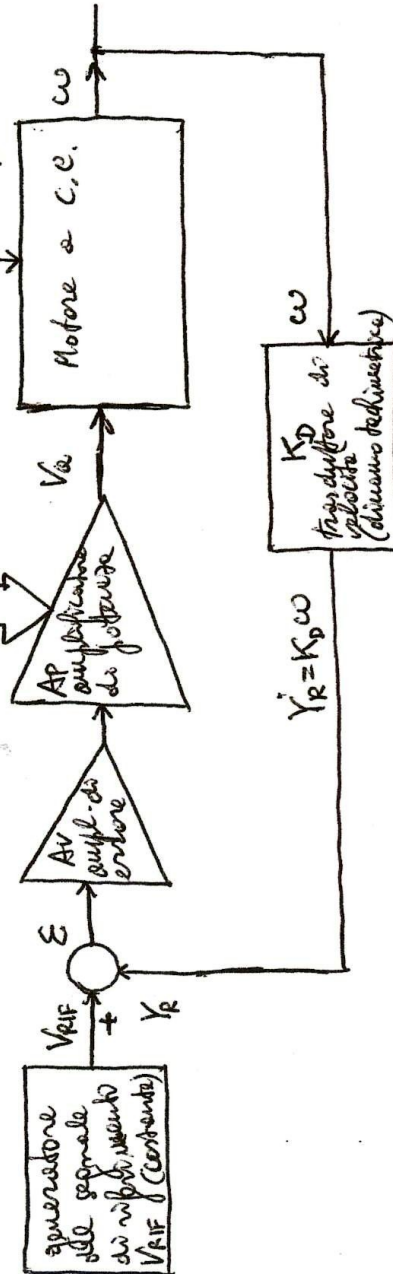
$$C_m - C_r = J_T \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega = \frac{1}{J_T} \int (C_m - C_r) dt$$

$C_m \rightarrow$ coppia motore sviluppata dal motore
 $C_r \rightarrow$ coppia resistente applicata dal carico
 $\omega \rightarrow$ velocità angolare
 $\theta = \int \omega dt$
 $J_T = J_m + J_c$ (momento d'inerzia del motore e del carico)

Schema a blocchi di un controllo di velocità (servomeccanismo di velocità) 4
 indipendente un motore a corrente continua con eccitazione indipendente -
 adattamento di velocità

(La velocità superiore ω m)
 mantiene costante indipendente -
 mente della coppia resistente
 in applicando il caso
 C_a (coppia resistente)

potenza elettrica
 per l'alimentazione
 del servomeccanismo



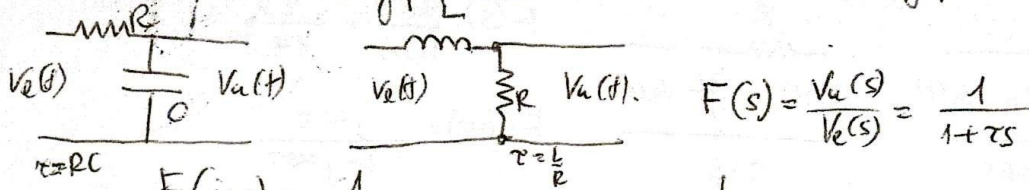
$K_D \rightarrow$ coefficiente di
 proporzionalità
 tra la derivata della
 velocità e la
 tensione di controllo

$$C_m - C_a = J_T \alpha = J_T \frac{d\omega}{dt}$$

$\alpha \rightarrow$ accelerazione
 angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$\omega \rightarrow$ velocità angolare $\omega = \int \alpha dt$

Diagrammi di Bode e di Nyquist.



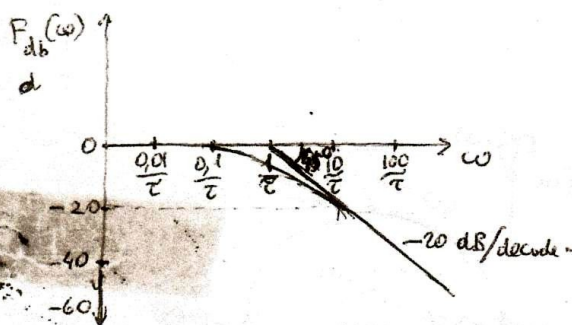
$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

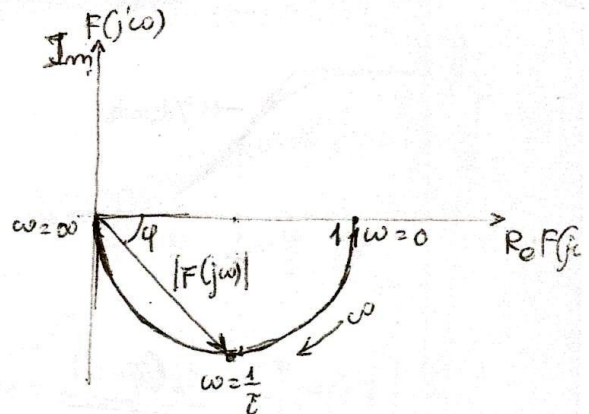
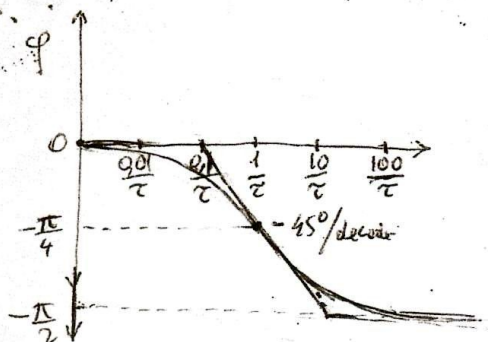
$$F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |F(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

per $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $F_{dB}(\omega) \rightarrow 0$, per $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $F_{dB}(\omega) \approx -20 \log_{10} \omega\tau$



$$F_{dB}(\omega = \frac{1}{\tau}) = -20 \log_{10} \sqrt{2} = -20 \cdot \frac{1}{2} \log_{10} 2 = -10 \cdot 0,3 = -3 \text{ dB}$$

$$\varphi = 0 - \arctan \omega\tau = -\arctan \omega\tau$$

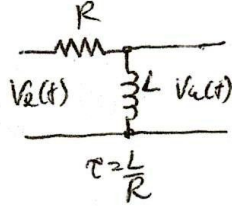
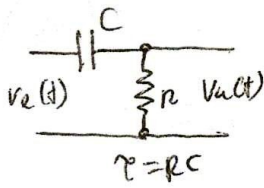


$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} = \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = \omega\tau$$

$$V_u(s) = \frac{V_e(s)}{1 + \tau s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{V_e(s)}{1 + \tau s}$$

Sistemi del 1° ordine pure d.b.



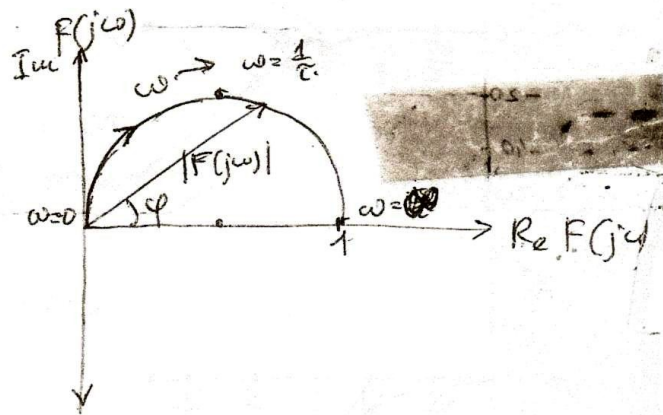
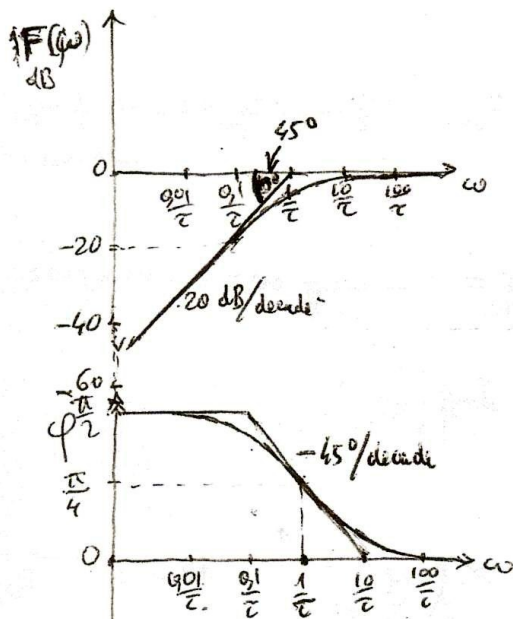
$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

$$F(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad ; \quad F_{dB} = 20 \log |F(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega\tau - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

per $\omega\tau \ll 1$ $F_{dB}(\omega) \approx 20 \log_{10} \omega\tau$

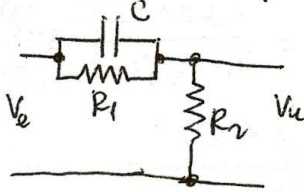
per $\omega\tau \gg 1$ $F_{dB}(\omega) \approx 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \omega\tau$



$$|F(j\omega)| = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\frac{\pi}{2} - \varphi)}} = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi$$

$\arctan \omega\tau = \frac{\pi}{2} - \varphi$
 $\tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \omega\tau$

Rețea anticipativă



$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{R_2}{R_2 + R_1 // \frac{1}{sC}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1/sC}{R_1 + 1/sC}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1/sC}{R_1Cs + 1}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{R_1Cs + 1}} = \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_2(R_1Cs + 1) + R_1}$$

$$= \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_2(R_1Cs + 1) + R_1} = \frac{R_1C(s + \frac{1}{R_1C})}{R_1C(s + \frac{R_2 + R_1}{R_1R_2C})} = \frac{(s + \frac{1}{\tau})}{(s + \frac{1}{\kappa\tau})} \quad \left| \begin{array}{l} \kappa = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \tau = R_1C \end{array} \right.$$

$$F(j\omega) = \frac{\kappa(1 + j\omega\tau)}{(1 + j\omega\kappa\tau)} \quad , \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} F(j\omega) = \kappa \frac{\tau}{\kappa\tau} = 1$$

$\arg F(j\omega) = \omega\tau - \omega\kappa\tau$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(j\omega) = \kappa$$

$\kappa < 1$

$$F_{dB}(j\omega) = 20 \log_{10} \kappa + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\kappa^2\tau^2}$$

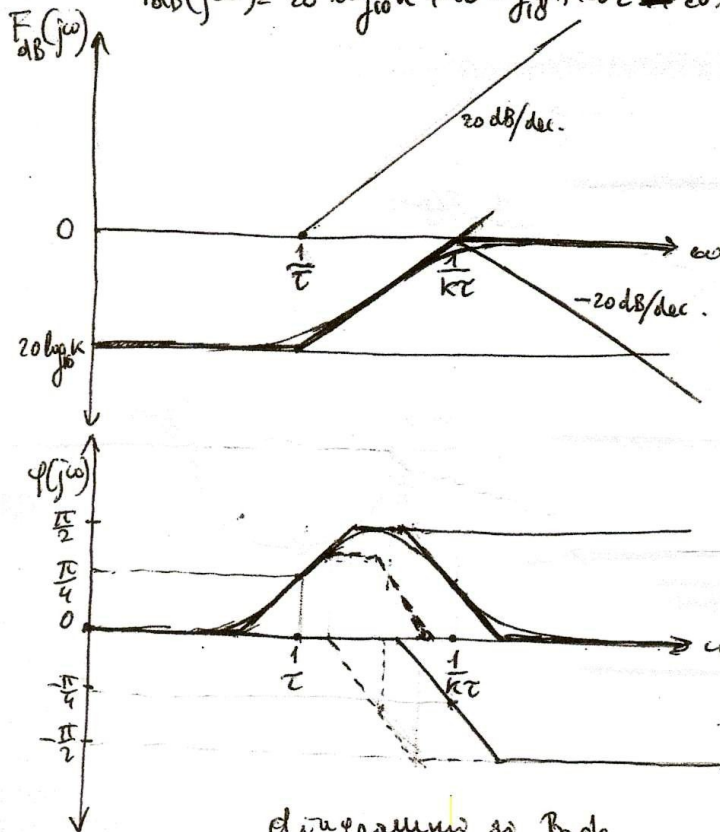


diagramme si Bode

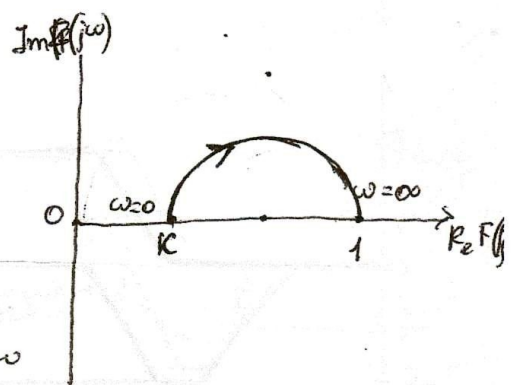
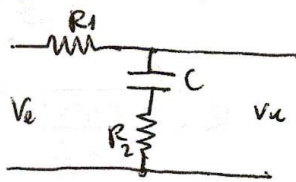


diagramme a Nyquist

Netz untersuchen.



$$R_2 C = \tau$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{K}$$

$$K = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$$

$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_2 C s + 1}{(R_1 + R_2) C s + 1}$$

$$= \frac{R_2 C \left(s + \frac{1}{R_2 C}\right)}{(R_1 + R_2) C \left[s + \frac{1}{(R_1 + R_2) C}\right]} = \frac{1}{K} \frac{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}{\left(s + \frac{1}{K\tau}\right)}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{K} \frac{(1 + j\omega\tau)}{(1 + j\omega K\tau)}$$

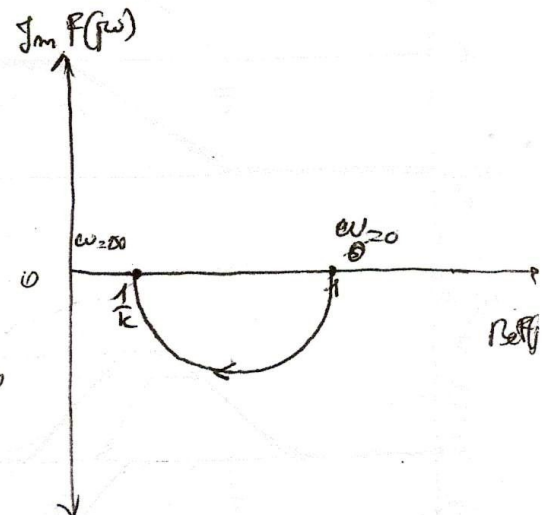
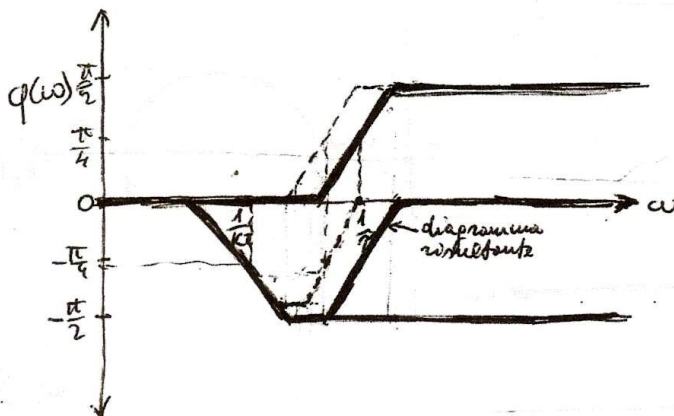
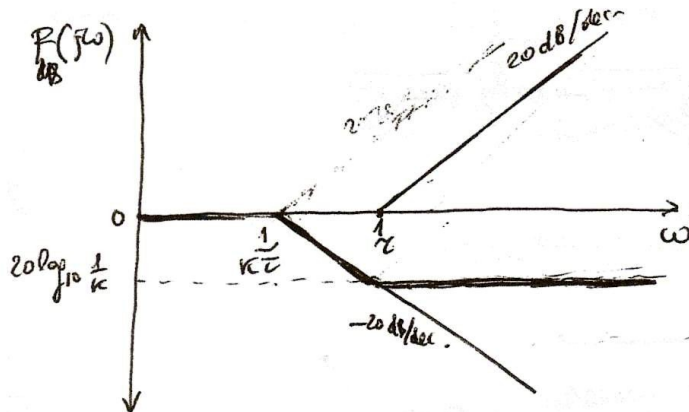
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(j\omega) = \frac{1}{K}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(j\omega) = 1$$

$$\frac{1}{(R_1 + R_2) C} = \frac{1}{K R_2 C} = \frac{1}{K\tau}$$

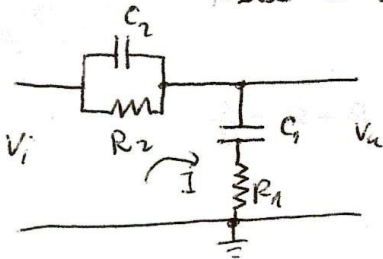
$$\varphi(\omega) = \arg(1 + j\omega\tau) - \arg(1 + j\omega K\tau)$$

$$F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 K^2 \tau^2}$$



Rete a sella

5



$$I = \frac{V_i}{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + sC_2} + R_1 + \frac{1}{sC_1}}$$

$$V_u = I \left(R_1 + \frac{1}{sC_1} \right) = \frac{V_i}{\frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s} + R_1 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \left(R_1 + \frac{1}{sC_1} \right)$$

$$= \frac{V_i}{\frac{R_2 C_1 s + R_1 C_1 s (1 + R_2 C_2 s) + 1 + R_2 C_2 s}{(1 + R_2 C_2 s) s C_1}} \cdot \frac{1 + R_1 C_1 s}{s C_1}$$

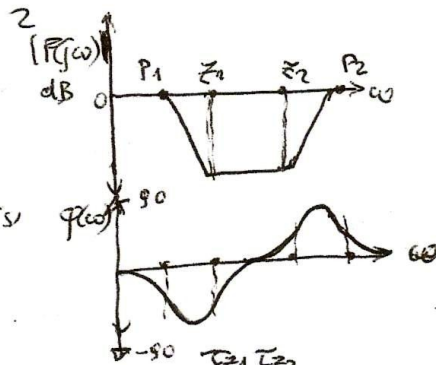
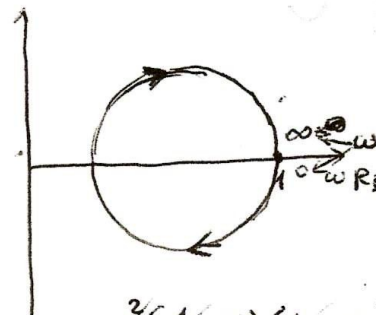
$$= \frac{V_i (1 + R_1 C_1 s) (1 + R_2 C_2 s)}{R_2 C_1 s + R_1 C_1 s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + 1 + R_2 C_2 s}$$

$$F(s) = \frac{V_u}{V_i} = \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2} = \frac{(1 + \tau_{z1} s)(1 + \tau_{z2} s)}{1 + (\tau_{z1} + \tau_{z2} + \tau_{z1} \tau_{z2}) s + \tau_{z1} \tau_{z2} s^2}$$

$$1 + (\tau_{z1} + \tau_{z2} + \tau_{z1} \tau_{z2}) s + \tau_{z1} \tau_{z2} s^2 = 0$$

$$s = -(\tau_{z1} + \tau_{z2} + \tau_{z1} \tau_{z2}) \pm \sqrt{(\tau_{z1} + \tau_{z2} + \tau_{z1} \tau_{z2})^2 - 4 \tau_{z1} \tau_{z2}}$$

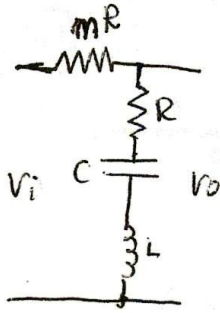
Im F(s)



$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \frac{s^2 \left(\frac{1}{s} + \tau_{z1} \right) \left(\frac{1}{s} + \tau_{z2} \right)}{s^2 \left[\frac{1}{s^2} + (\tau_{z1} + \tau_{z2} + \tau_{z1} \tau_{z2}) \frac{1}{s} + \tau_{z1} \tau_{z2} \right]} = \frac{\tau_{z1} \tau_{z2}}{\tau_{z1} \tau_{z2}} = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = 1$$

6

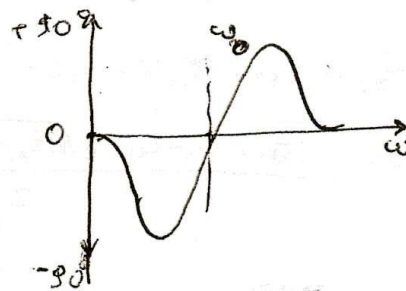
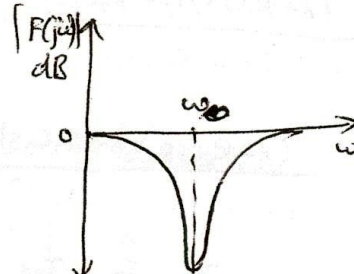
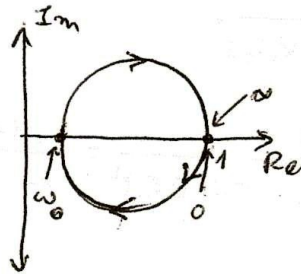


$$V_o = \frac{V_i}{(m+1)R + Ls + \frac{1}{sC}} \cdot R + sL + \frac{1}{sC} =$$

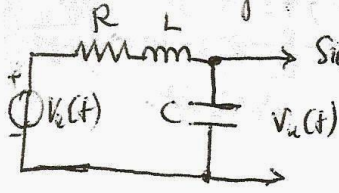
$$= \frac{V_i (RCs + LCs^2 + 1)}{(m+1)RCs + LCs^2 + 1}$$

$$F(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{LC(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})}{LC(s^2 + (m+1)\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} = \frac{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + (m+1)\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} =$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 1 ; \quad \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \frac{1}{1} = 1$$



Diagrammi di Bode e di Nyquist per i sistemi di 2° ordine



$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_k(s)} = \frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$

$$F(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$

7
poli: $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$
 $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$

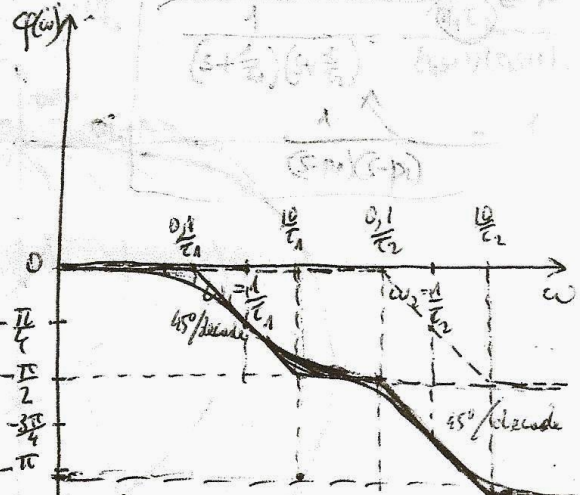
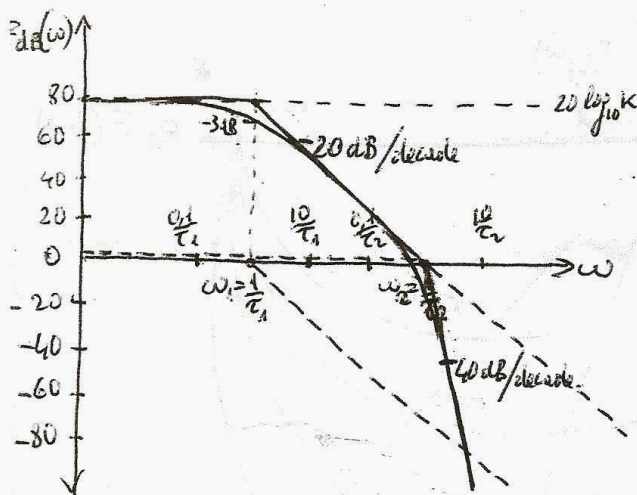
$$F_{dB} = 20 \log_{10} |F(j\omega)| = 20 \log_{10} K - 20 \log_{10} \sqrt{1+\omega^2\tau_1^2} - 20 \log_{10} \sqrt{1+\omega^2\tau_2^2}$$

$$\varphi = -\arctg \omega\tau_1 - \arctg \omega\tau_2$$

1° caso: $\gamma > 1$ - poli reali e distinti, con $\tau_1 > \tau_2$

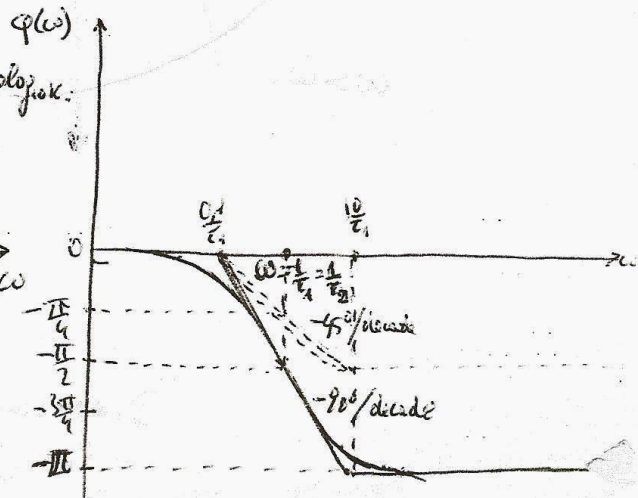
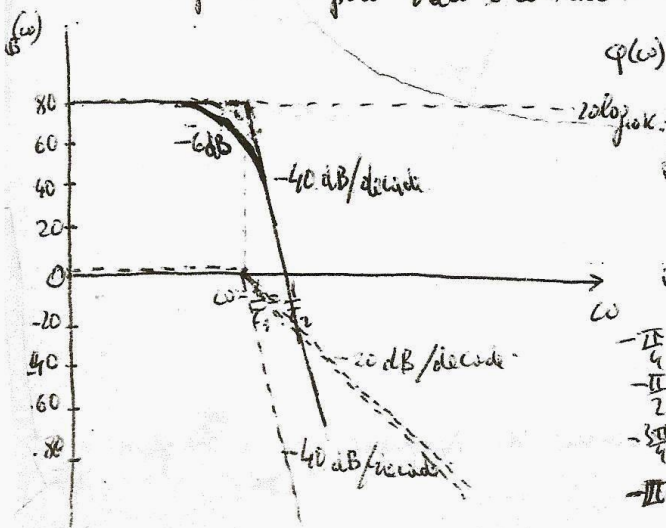
Modulo

Fase



Diagrammi di Bode

2° caso: $\gamma = 1$ - poli reali e coincidenti - $\tau_1 = \tau_2$

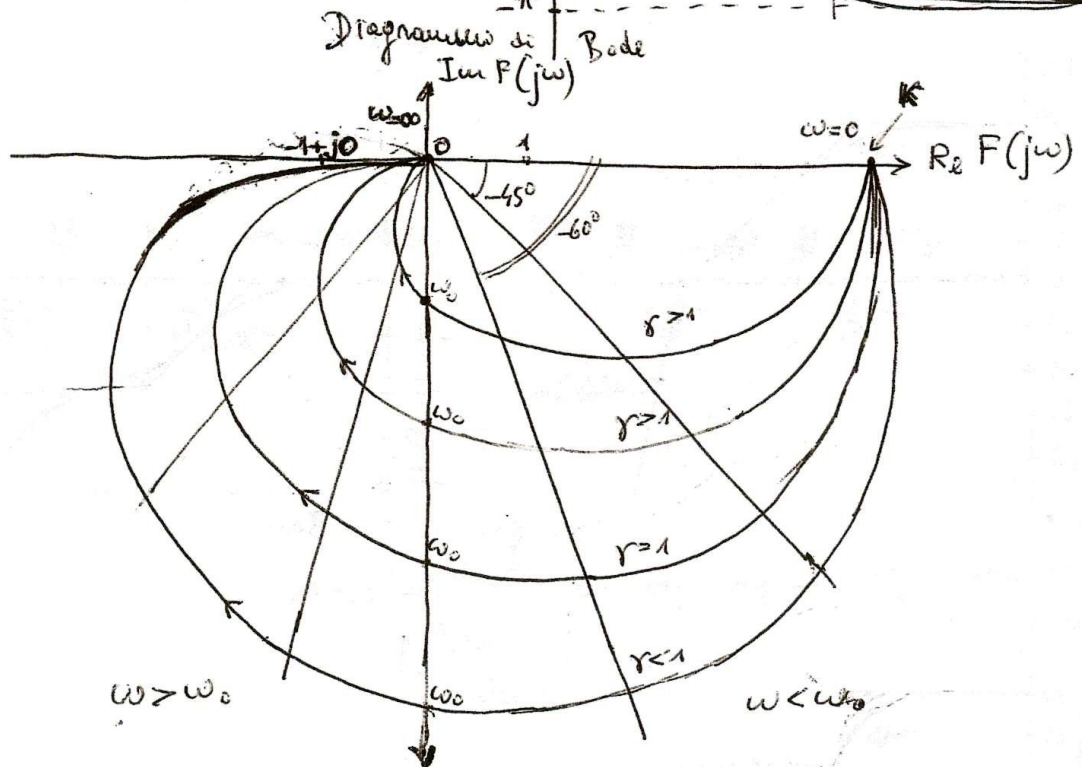
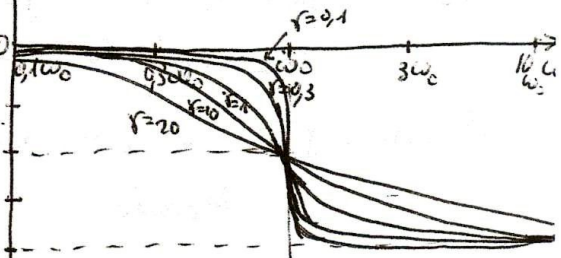
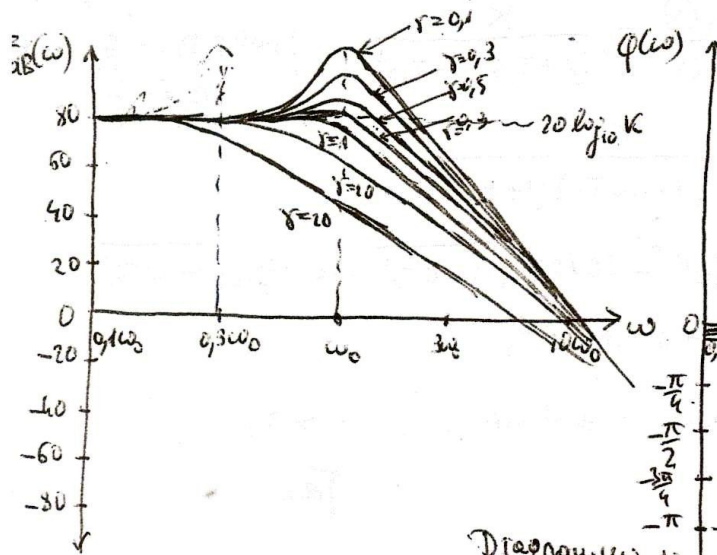


Diagrammi di Nyquist per i sistemi di 2° ordine

3° caso $r < 1$ - poli complessi coniugati

~~$p_1 = \alpha + j\beta$~~ ~~$p_2 = \alpha - j\beta$~~ 8

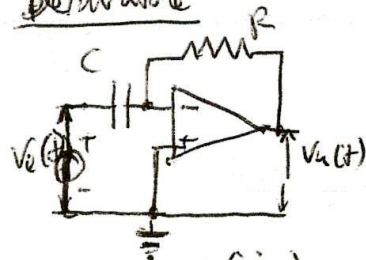
con $\alpha = -\frac{R}{2L}$, $\beta = \omega = \omega_0 \sqrt{1-r^2}$
 $\alpha^2 + \beta^2 = \omega_0^2$



Diagrammi di Nyquist per i tre casi:
 $r > 1$, $r = 1$, $r < 1$

9

Derivatore



$$V_u(t) = -RC \frac{dV_e(t)}{dt}$$

$$V_u(s) = -RCs V_e(s)$$

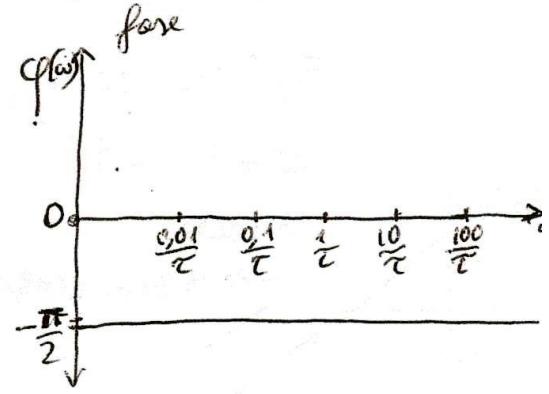
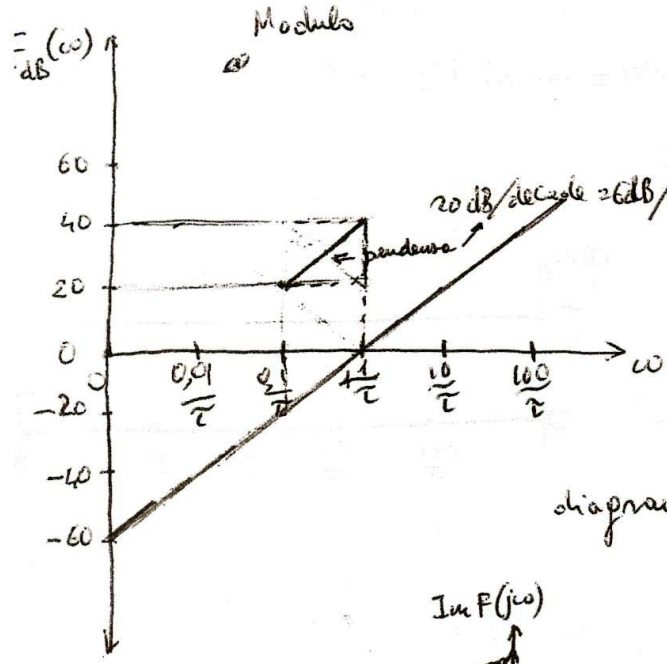
$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = -RCs = -\tau$$

se $V_e(t)$ per $t=0^+ = 0$

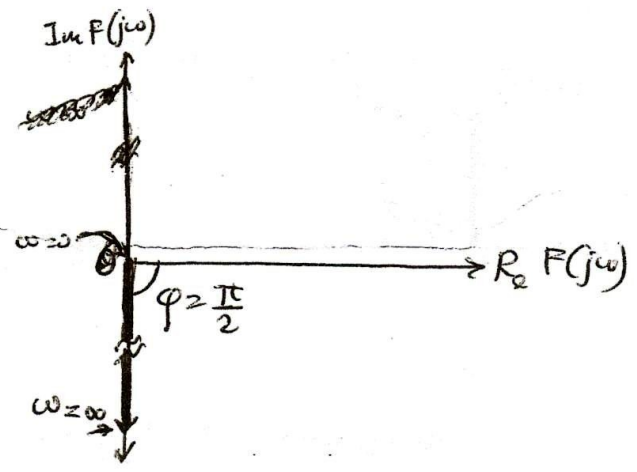
$$F(j\omega) = -j\omega\tau$$

$$|F(j\omega)| = \omega\tau$$

$$F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |F(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega\tau ; \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

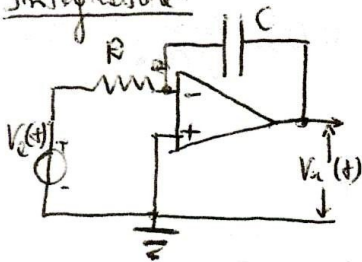


diagrammi di Bode



Diagrammi di Bode dell'integratore e del derivatore 10
(con inversione di segno)

Integratore:



$$V_u(t) = -\frac{1}{RC} \int V_e(t) dt$$

$$V_u(s) = -\frac{1}{RC} \frac{V_e(s)}{s} = -\frac{1}{\tau} \frac{V_e(s)}{s}$$

$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = -\frac{1}{\tau s}$$

$$F(j\omega) = -\frac{1}{j\omega\tau}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\omega\tau}$$

$$F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |F(j\omega)| = -20 \log_{10} \omega\tau$$

$$\varphi = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

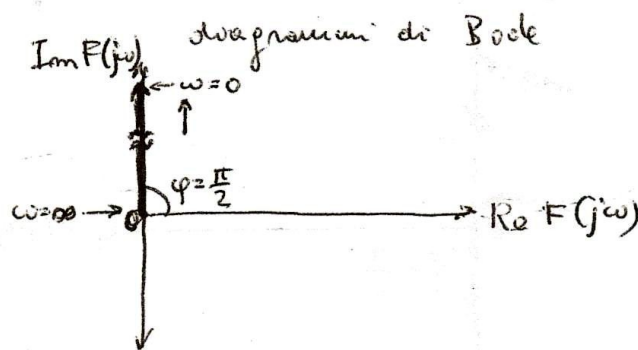
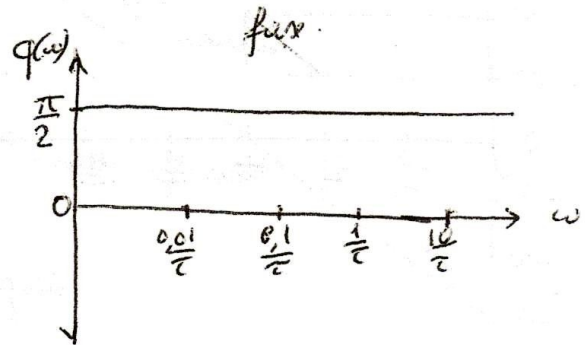
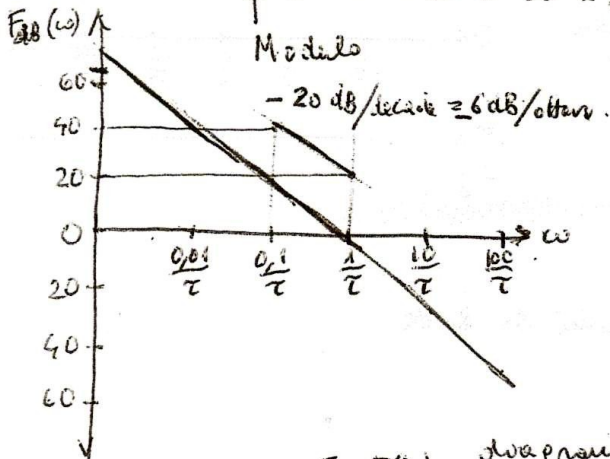
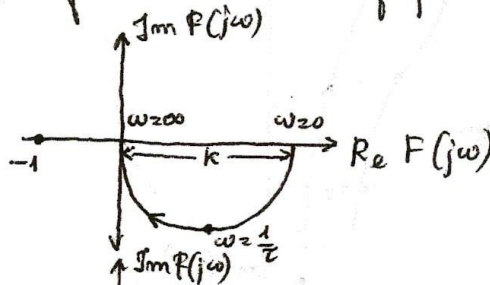


diagramma di Nyquist

Diagrammi di Nyquist di alcune funzioni di trasferimento di uso frequente

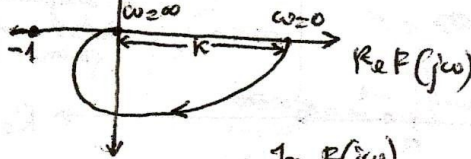
$$P(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

Sistema stabile



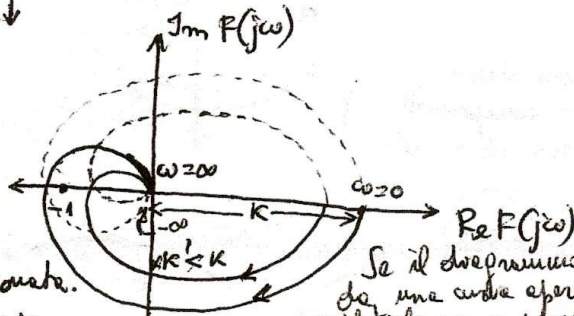
$$P(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

Sistema stabile



$$F(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$$

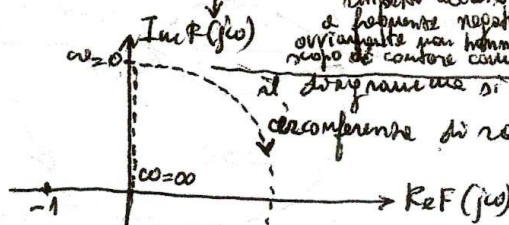
Sistema a stabilità condizionata.
Diventa stabile se diminuisce K



Se il diagramma è costituito da una curva aperta, si vuole completarlo con un arco simmetrico rispetto all'asse reale (---), corrispondente a frequenze negative comprese fra $-\infty$ e 0, che ovviamente non hanno significato fisico; così il ramo di contorno corrispondente a ω compreso intorno al punto $-1 + j$ al diagramma si chiude attraverso una circonferenza di raggio infinito.

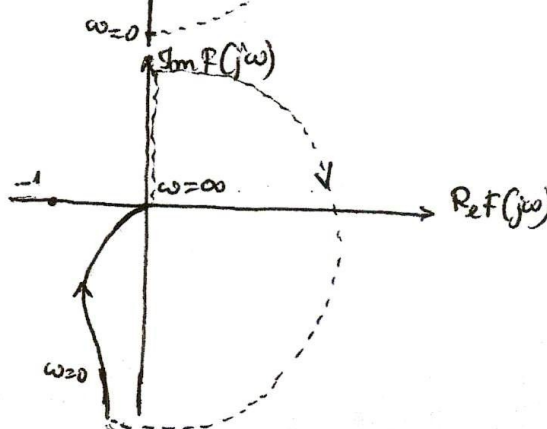
$$\frac{K}{s}$$

Sistema stabile



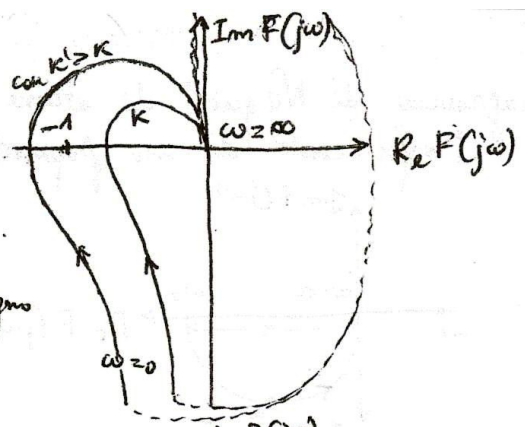
$$\frac{K}{s(1 + \tau s)}$$

Sistema stabile



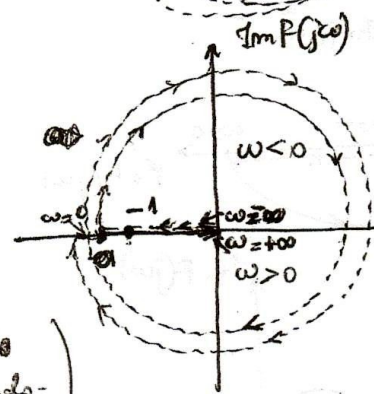
$$\frac{K}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$

Sistema a stabilità condizionata, che diviene instabile al crescere del guadagno



$$\frac{K}{s^2}$$

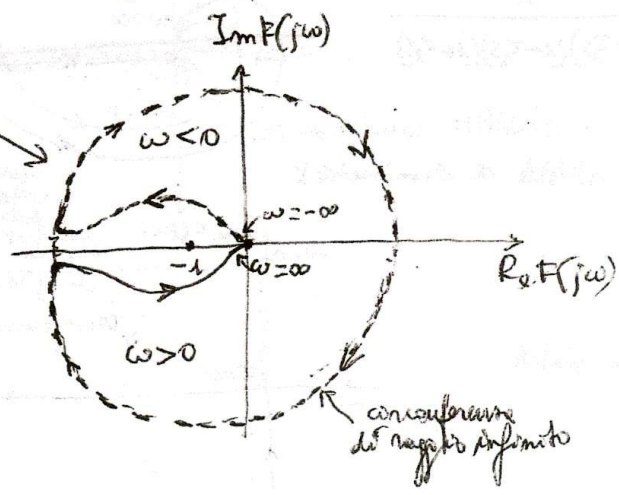
Sistema instabile



Il diagramma gira 2 volte intorno al punto $-1+j0$ in quanto ha un polo doppio nell'origine del piano complesso.

per diventare stabile (deve essere compensato con uno zero ed un polo-
per es: $\frac{K(1+\tau_1 s)}{s^2(1+\tau_2 s)}$

in tal modo il diagramma non attraversa il punto critico $-1+j0$



Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $F(s)$ 13

$$F(s) = \frac{10s(1+\tau_1s)(1+\tau_5s)}{(1+\tau_2s)(1+\tau_3s)(1+\tau_4s)^2}$$

$$\tau_1=10^{-1}\text{ sec}, \tau_2=10^{-2}\text{ sec}, \tau_3=10^{-3}\text{ sec}, \tau_4=10^{-5}\text{ sec}, \tau_5=10^{-6}\text{ sec}$$

$$F(j\omega) = \frac{10j\omega(1+j10^{-1}\omega)(1+j10^{-6}\omega)}{(1+j10^{-2}\omega)(1+j10^{-3}\omega)(1+j10^{-5}\omega)^2}$$

zeri di $F(s)$: $s=0$ (nell'origine del piano complesso), $s=-\frac{1}{\tau_1}$, $s=-\frac{1}{\tau_5}$

poli di $F(s)$: $s=-\frac{1}{\tau_2}$, $s=-\frac{1}{\tau_3}$, $s=-\frac{1}{\tau_4}$ (polo doppio)

~~poli~~ ^{pulсации} di taglio: $\omega_1=\frac{1}{\tau_1}=10\text{ rad/sec}$, $\omega_2=\frac{1}{\tau_2}=10^2\text{ rad/sec}$, $\omega_3=\frac{1}{\tau_3}=10^3\text{ rad/sec}$, $\omega_4=\frac{1}{\tau_4}=10^5\text{ rad/sec}$, $\omega_5=\frac{1}{\tau_5}=10^6\text{ rad/sec}$.

$$|F(j\omega)| = \frac{10\omega \sqrt{1+10^2\omega^2} \sqrt{1+10^{12}\omega^2}}{\sqrt{1+10^4\omega^2} \sqrt{1+10^6\omega^2} (\sqrt{1+10^{10}\omega^2})^2}$$

$$F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \sqrt{1+10^2\omega^2} + 20 \log_{10} \sqrt{1+10^{12}\omega^2} - 20 \log_{10} \sqrt{1+10^4\omega^2} - 20 \log_{10} \sqrt{1+10^6\omega^2} - 40 \log_{10} \sqrt{1+10^{10}\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = 0^\circ + 90^\circ + \arctg 10^{-1}\omega + \arctg 10^{-6}\omega - \arctg 10^{-2}\omega - \arctg 10^{-3}\omega - 2\arctg 10^{-5}\omega$$

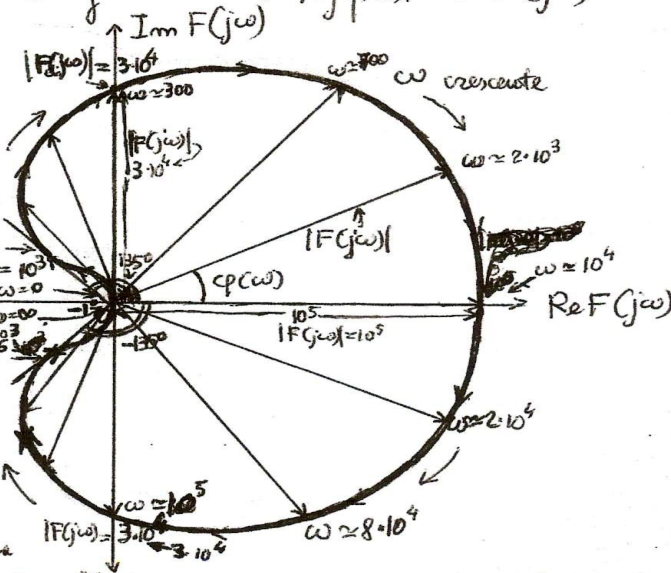
I diagrammi risultanti di $F_{dB}(\omega)$ e di $\varphi(\omega)$ si ottengono sommando algebricamente i contributi dei diagrammi relativi a ciascun polo ed a ciascuno zero.

Diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$

Il diagramma di Nyquist si ottiene tracciando, per tutti i valori di ω ($0 < \omega < \infty$), i corrispondenti vettori che rappresentano nel piano complesso $[Re F(j\omega), Im F(j\omega)]$ la funzione complessa $F(j\omega)$, vettori ~~non~~ individuati dal modulo $|F(j\omega)|$ e dalla fase $\varphi(\omega)$, estratti ricavabili dai diagrammi di Bode.

La fase $\varphi(\omega)$ comincia con l'angolo, positivo o negativo, che il vettore rappresentativo di $F(j\omega)$ forma col semiasse positivo $Re F(j\omega)$.

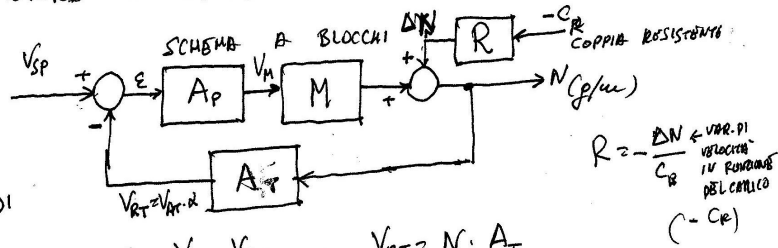
La pulsazione ω cresce da 0 a ∞ procedendo lungo il diagramma in senso orario.



Il diagramma non gira intorno al punto $-1+j0$; pertanto il sistema avente come funzione di trasferimento il guadagno d'anello $h F(j\omega)$ è stabile.

CONTROLLO CONTINUO DI VELOCITÀ A CATENA CHIUSA PER MOTORE IN C.C. CON ALTERNATORE TACHIMETRICO

E : SEGNALE D'ERRORE
 V_{SP} : SET POINT DI VELOCITÀ
 V_{RT} : SEGNALE DI REAZIONE TACHIMETRICO
 A_P : AMPLIFICATORE DI POTENZA
 M : MOTORE IN C.C.
 A_T : ALTERNATORE TACHIMETRICO
 R : FUNZIONE DI TRASFERIMENTO RELATIVA ALLA COPPIA RESISTENTE



$$E = V_{SP} - V_{RT} ; V_{RT} = N \cdot A_T$$

$$N = E \cdot A_P \cdot M + Y_N = E \cdot A_P \cdot M - C_R R$$

$$N = (V_{SP} - V_{RT}) A_P M - C_R R ; N = V_{SP} A_P M - N A_T A_P M - C_R R$$

$$N + N A_T A_P M = V_{SP} A_P M - C_R R$$

$$N(1 + A_T A_P M) = V_{SP} A_P M - C_R R$$

$$N = \frac{V_{SP} A_P M}{1 + A_T A_P M} - \frac{C_R R}{1 + A_T A_P M}$$

$$G_{CC} = \frac{N}{V_{SP}} = \frac{A_P M}{1 + A_T A_P M}$$

GUADAGNO A CATENA CHIUSA

G_{ca}
 GUADAGNO A CATENA APERTA
 (DI ANELLO)

CONTROLLO DI VELOCITÀ A CATENA CHIUSA
PER MOTORE IN C.C. CON ALTERNATORE TACHIMETRICO

