

Grandezze alternate

Prof. Antonio Cusi

Si definisce grandezza periodica ogni grandezza $f(t)$ funzione del tempo, per la quale vale la relazione $f(t+T) = f(t)$, essendo T il periodo, cioè il più piccolo intervallo di tempo da aggiungere a t per ottenere il valore $f(t)$.

Esempi di grandezze periodiche:

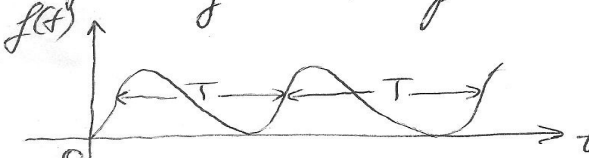


Fig. 1
valor medio $\neq 0$

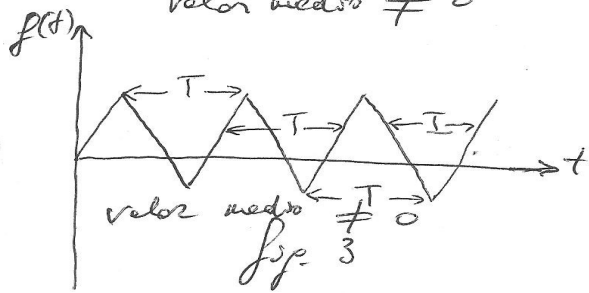


Fig. 3
valor medio $\neq 0$

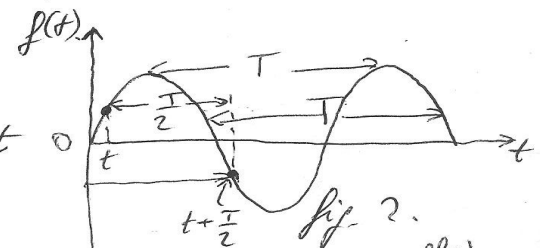


Fig. 2.
(valor medio nullo)

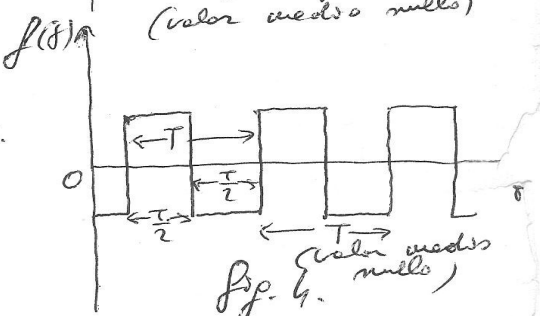
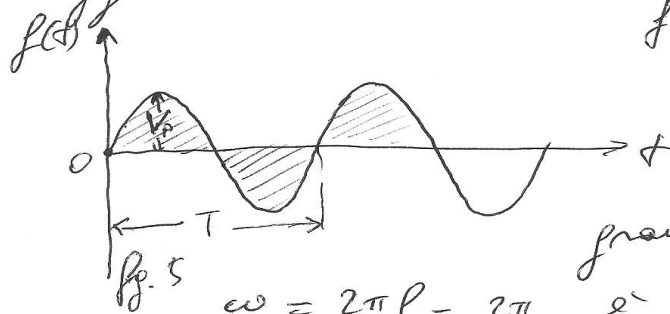


Fig. 4.
(valor medio nullo)

In particolare, una grandezza periodica si dice alternata se il suo periodo è divisibile in 2 semiperiodi tali che in ~~uno~~ ^{i valori assunti} di ~~entrate~~ ^{la grandezza} differiscano solo per il segno dai valori assunti dall'altro semiperiodo (Fig. 2 e Fig. 4) $f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$

~~Grandezze alternate sinusoidali~~ 2

Si definisce grandezza sinusoidale ogni grandezza alternata (tensione o corrente) variabile nel tempo con legge sinusoidale.



$$f(t) = V_p \sin \omega t,$$

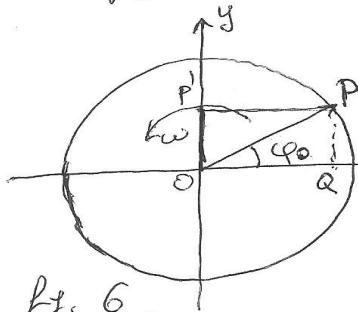
dove V_p è il valore di picco (o ampiezza) della grandezza sinusoidale ed

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ è la pulsazione, espressa in radianti/sec (rad/s);

f è la frequenza, pari al reciproco del periodo T .
Come per qualsiasi grandezza alternata (onde quadre, onde triangolari, onde sinusoidali), il valore medio di una grandezza sinusoidale è nullo essendo uguali le aree (di segno opposto) relative a ciascun semiperiodo (area totale nulla).

Ogni grandezza sinusoidale è rappresentabile mediante un vettore rotante con velocità angolare pari alla pulsazione $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ e formante al tempo $t=0$ con il semiasse positivo delle x un angolo ϕ_0 detto costante di fase. Pertanto, considerando

la fig. 6, il vettore rotante OP rappresenta la
 grandezza sinusoidale $f(t) = OP \sin(\omega t + \varphi_0)$.
 Infatti $OP \sin(\omega t + \varphi)$ non è altro che
 la proiezione del moto circolare
 uniforme del punto P sull'asse delle
 ordinate (Bisogna ricordare che
 la figura 6.



la figura 6. La figura 6 rappresenta un moto armonico
 avente per ampiezza il raggio OP della ~~cerchia~~ circonferenza
 descritta dal punto P . Il modulo del vettore OP
 rappresenta pertanto l'ampiezza V_p della grandezza
 sinusoidale considerata: $f(t) = V_p \sin(\omega t + \varphi_0)$.

L'argomento della funzione seno è fase
 la fase della grandezza sinusoidale, cioè l'angolo
 $\omega t + \varphi_0$ crescente linearmente in funzione del
 tempo. Per $t=0$ la fase si riduce a φ_0
 (costante di fase), cioè all'angolo formato inizialmente
 dal vettore OP con il semiasse x positivo.

Se d'altra parte si tiene presente che i
 numeri complessi si possono rappresentare come vettori
 nel piano di Gauss, si deduce da qui vettore
 rotante (grandezza sinusoidale) è rappresentabile

otto forme di numero complesso.

Ricordando in particolare le formule di Eulero, dimostrabili mediante sviluppi in serie di MacLaurin delle funzioni esponenziali complesse $e^{\pm jx}$, si ha:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

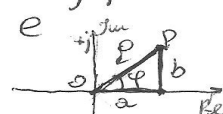
$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

Conseguentemente, la forma trigonometrica di un numero complesso $a + jb = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ o del suo complesso coniugato $a - jb = \rho(\cos \varphi - j \sin \varphi)$, è esprimibile attraverso le funzioni esponenziali complesse $e^{j\varphi}$ e $e^{-j\varphi}$

forme esponenziali del numero complesso

$$a + jb : \rho e^{j\varphi}$$

$$a - jb = \rho e^{-j\varphi}$$



dove $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ è il modulo del numero complesso e φ è il suo argomento $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$

In conclusione, una grandezza sinusoidale $f(t) = V_p \sin(\omega t + \varphi)$ è rappresentabile nella forma esponenziale complessa

$$f(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(valore di picco)}}}{V_p} e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{costante di fase (argomento al tempo } t=0) \\ \text{fase = argomento della funzione esponenziale complessa} \end{array} \right.$$

Relazioni e Parametri caratteristici delle grandezze sinusoidali

Consideriamo una grandezza sinusoidale (tensione o corrente)

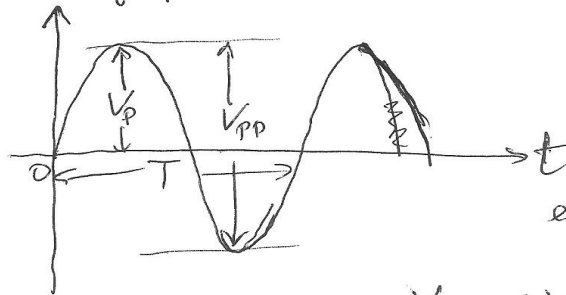
$$\vec{V} = V_p e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \vec{I} = I_p e^{j(\omega t + \varphi)}$$

(simbolo di vettore)

V_p e I_p sono i valori di picco (ampiezza) rispettivamente della tensione $\vec{V}$ e della corrente $\vec{I}$, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ e' la pulsazione,

f e' la frequenza = $\frac{1}{T}$, espressa in Hertz (Hz)

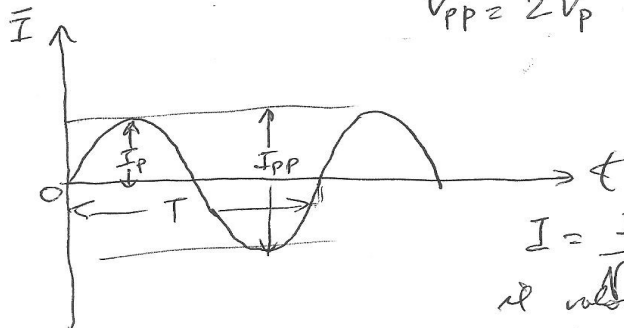
fig. 7.



$$V = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = 0,707 V_p$$

e' il valore efficace della tensione $\vec{V}$

$$V_{pp} = 2V_p \text{ e' il valore picco-picco}$$



$$I = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = 0,707 I_p$$

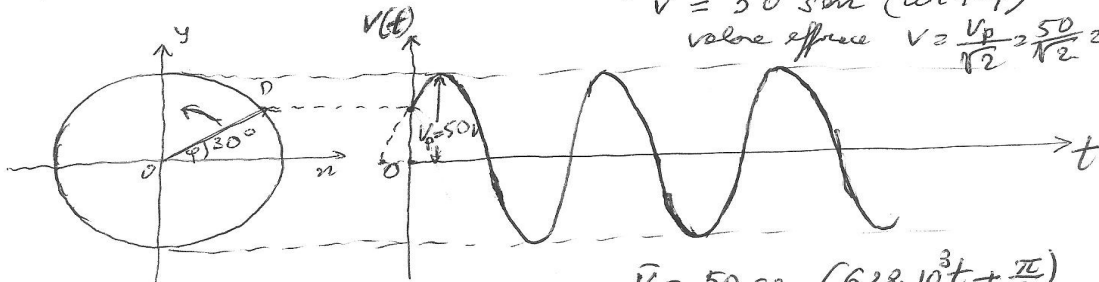
e' il valore efficace della corrente $\vec{I}$

$$I_{pp} = 2I_p \text{ e' il valore picco-picco}$$

Esempi di segnali sinusoidali

6

- 1) Tensione alternata ^{sinusoidale} con valore di picco di 50 V, frequenza di 1 KHz e costante di fase di 30° (sfasamento di 30° in anticipo)
 $\bar{V} = 50 \sin(\omega t + \varphi)$
 valore efficace $V = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{50}{\sqrt{2}} \approx 35,35 \text{ V}$

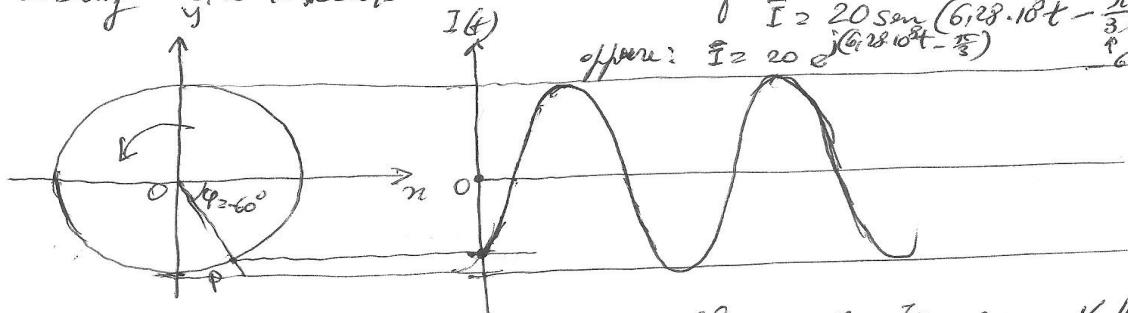


$$\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\bar{V} = 50 \sin(6,28 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{6})$$

oppure: $\bar{V} = 50 e^{j(6,28 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{6})}$ 30°

- 2) Corrente alternata sinusoidale con valore di picco di 20 mA, frequenza di 100 MHz e costante di fase di -60° (sfasamento di 60° in ritardo)
 $\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$
 $\bar{I} = 20 \sin(6,28 \cdot 10^8 t - \frac{\pi}{3})$

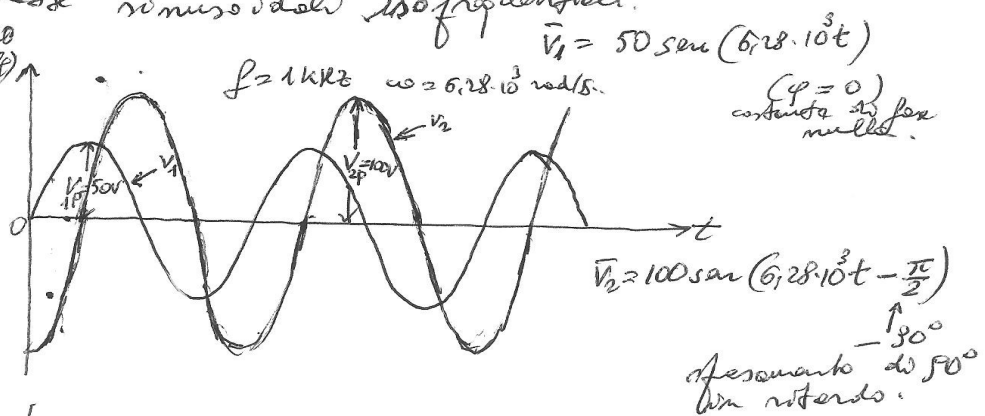


valore efficace $I = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \approx 14,14 \text{ mA}$

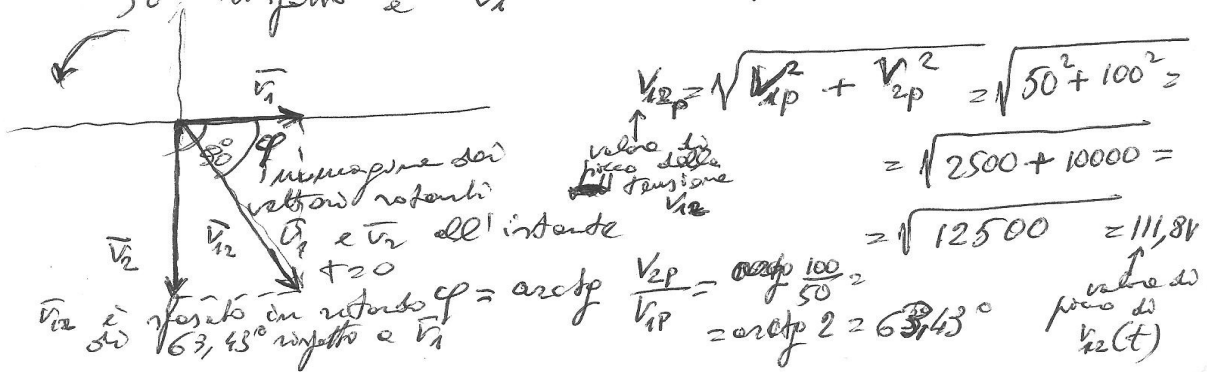
Risultante di 2 o più grandezze alternate sinusoidali aventi la stessa frequenza.

Perché le grandezze alternate sinusoidali sono rappresentabili mediante vettori rotanti (o numeri complessi), si applicano le regole dell'algebra vettoriale per ottenere la grandezza sinusoidale risultante dalla composizione di 2 o più grandezze sinusoidali isofrequenziali.

Esempio



La funzione sinusoidale risultante si ottiene applicando le regole del parallelogramma ai vettori $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, facendo in ritardo di 90° rispetto a $\vec{V}_1$.



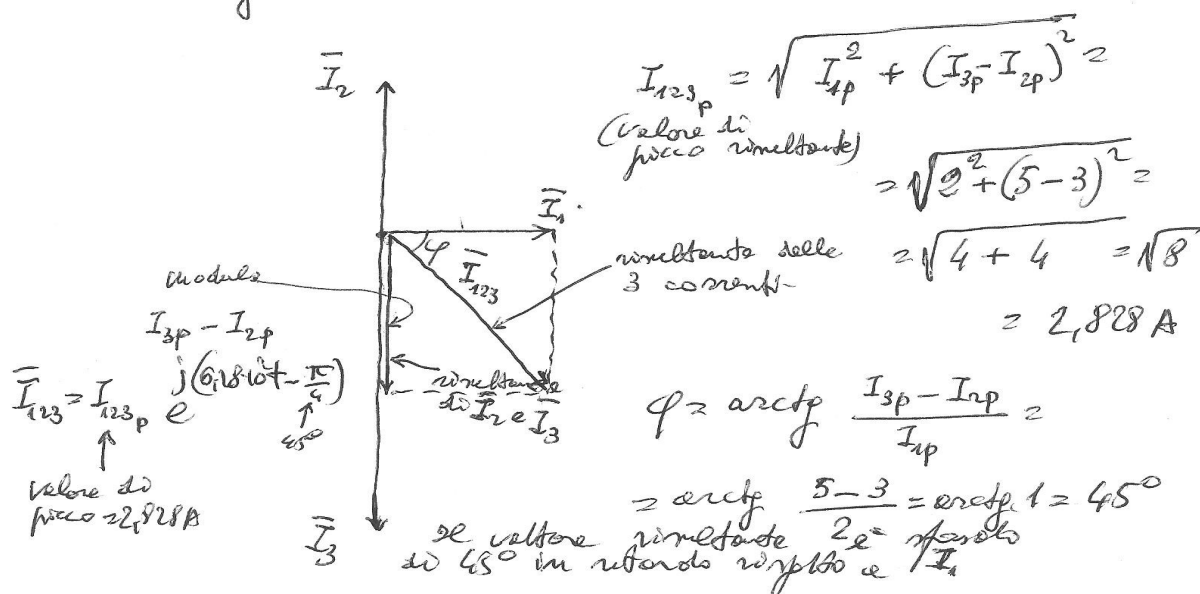
Risultante di tre correnti sinusoidali:
 Esempio: $\bar{I}_1 = 2 \sin(6,28 \cdot 10^3 t)$ $f = 100 \text{ Hz}$ $\omega = 6,28 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

$I_{1p} = 2 \text{ A}$ oppure: $\bar{I}_1 = I_{1p} e^{j 6,28 \cdot 10^3 t}$

$\bar{I}_2 = 3 \sin(6,28 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{2})$ ← sfasamento di 90° in anticipo rispetto a $\bar{I}_1$
 $I_{2p} = 3 \text{ A}$ oppure $\bar{I}_2 = I_{2p} e^{j(6,28 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{2})}$

$\bar{I}_3 = 5 \sin(6,28 \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{2})$ ← sfasamento di 90° in ritardo rispetto a $\bar{I}_1$
 $I_{3p} = 5 \text{ A}$ oppure: $\bar{I}_3 = I_{3p} e^{j(6,28 \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{2})}$

Diagramma vettoriale.

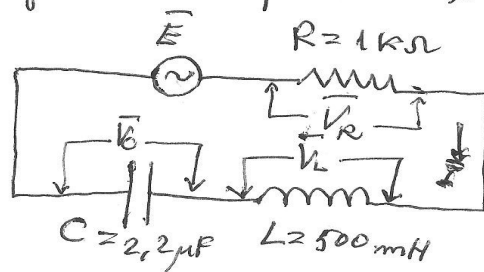


Circuiti RLC in regime sinusoidale

9

Esempio 1: circuito RLC serie

Consideriamo un circuito ^{RLC serie} costituito da un generatore sinusoidale $\bar{E}$ con f.e.m. di 220V (valore efficace) e frequenza di 50 Hz, da un resistore R da 1 k Ω , da un condensatore C da 2,2 μ F e da un induttore L da 500 mH. Ci proponiamo di calcolare la corrente $\bar{I}$ ~~esposta~~ erogata dal generatore, la tensione ai capi di ciascun componente e lo sfasamento φ tra i vettori $\bar{I}$ ed $\bar{E}$.



Con riferimento alle pagine 5...11 degli appunti sul circuito in regime sinusoidale, studiamo pertanto questo tipo di:

- 1) La tensione $\bar{V}_R$ ai capi del resistore è in fase con la corrente $\bar{I}$, poiché non interviene fenomeno induttivo né capacitivo, ma vale semplicemente la legge di Ohm: ~~in~~ i vettori $\bar{V}_R$ e $\bar{I}$ sono pertanto paralleli; $\bar{V}_R = R \bar{I}$
- 2) La tensione $\bar{V}_L$ ai capi dell'induttore L è sfasata in anticipo di 90° rispetto a $\bar{I}$ a causa dei fenomeni

di autoinduzione, dovuto al fatto che l'induttore L è percorso da una corrente variabile nel tempo con legge sinusoidale ed è pertanto soggetto alla legge di induzione elettromagnetica (Faraday, Neumann, Lenz)

$\bar{V}_L = j\omega L \bar{I}$ (la presenza dell'unità immaginaria j indica simbolicamente lo sfasamento di 90° in anticipo di $\bar{V}_L$ rispetto a $\bar{I}$, mentre il prodotto $X_L = \omega L$ è la reattanza induttiva, cioè la "resistenza" apparente che l'induttore manifesta a causa dei fenomeni di autoinduzione.)

3) La tensione $\bar{V}_C$ ai capi del condensatore C è esposta in ritardo di 90° rispetto a $\bar{I}$ a causa dei fenomeni di induzione elettrostatica dovuti al fatto che C periodicamente si carica e si scarica nel circuito in cui è inserito, essendo soggetto ad una f.e.m. sinusoidale.

$\bar{V}_C = -j \frac{\bar{I}}{\omega C}$ (la presenza dell'unità immaginaria j col segno - indica simbolicamente lo sfasamento di 90° in ritardo di $\bar{V}_C$ rispetto a $\bar{I}$, mentre il prodotto $X_C = \frac{1}{\omega C}$ è la reattanza capacitiva, cioè la "resistenza" apparente che il condensatore manifesta a causa dei fenomeni di induzione elettrostatica.)

Applicando la II legge di Kirchhoff si ha:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C \\ \uparrow & \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{f.e.m.} & \quad \text{caduta di tensione su capo di } R \quad \text{caduta di tensione su capo di } L \quad \text{caduta di tensione su capo di } C. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_R = R \bar{I} \\ \bar{V}_L = j\omega L \bar{I} \\ \bar{V}_C = -\frac{j}{\omega C} \bar{I} \end{cases}$$

$$\bar{E} = R \bar{I} + j\omega L \bar{I} - \frac{j}{\omega C} \bar{I} =$$

$$= \underbrace{\left[R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right]}_{\bar{Z}} \bar{I} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \bar{I}$$

$\bar{Z}$ è l'impedenza del circuito, definita come un numero complesso avente per parte reale la resistenza R e per parte immaginaria la reattanza complessiva $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ (somma algebrica delle reattanze induttive e capacitive.)

$$\boxed{\bar{Z} = R + jX}$$

se $X > 0$ prevale la reattanza induttiva, altrimenti prevale quella capacitiva.

Il modulo dell'impedenza $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ si misura in Ω e rappresenta ~~la~~ la "resistenza" complessiva dovuta sia al resistore che ai fenomeni induttivi e capacitivi.

$\bar{Z} = \frac{\bar{E}}{\bar{I}}$ è l'estensione in corrente alternata del concetto di resistenza ed è definito dal rapporto fra la tensione $\bar{E}$ applicata al circuito e la corrente $\bar{I}$ assorbita dallo stesso.

L'argomento φ dell'impedenza $\bar{Z}$ rappresenta l'angolo di sfasamento tra la tensione $\bar{E}$ e la corrente $\bar{I}$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

A questo punto, per calcolare ~~l'impedenza~~ l'intensità di corrente (valore efficace), bisogna calcolare il modulo di Z :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{(10^3)^2 + \left(0,5 \cdot 314 - \frac{1}{34,22 \cdot 10^6}\right)^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$$

$$= \sqrt{10^6 + \left(157 - \frac{1}{61808 \cdot 10^6}\right)^2} = \sqrt{10^6 + (157 - 1,447 \cdot 10^3)^2}$$

$$Z = \sqrt{10^6 + (-1250)^2} = \sqrt{10^6 + 1,5625 \cdot 10^6} = \sqrt{2,5625 \cdot 10^6} = 1632 \Omega$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{220}{1632} = 0,1348 \text{ A}$$

valore efficace
valore efficace

$$X_L = 157 \Omega \quad X_C = 1447 \Omega$$

reattanza induttiva
reattanza capacitiva

$$X_L = \omega L \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$V_R = I R = 0,1348 \cdot 10^3 = 134,8 \text{ V}$$

$$V_L = I \omega L = I X_L = 0,1348 \cdot 157 = 21,16 \text{ V}$$

$$V_C = \frac{I}{\omega C} = I X_C = 0,1348 \cdot 1447 = 195 \text{ V}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \arctg \frac{157 - 1447}{1000} = \arctg (-1,29) = -52,21^\circ$$

argomento di $\bar{E}$ ed $\bar{I}$
La f.e.m. $\bar{E}$ del generatore ritarda di $52,21^\circ$ rispetto alla corrente $\bar{I}$; pertanto il circuito si

comporta come un semplice circuito capacitivo, in quanto la tensione ai capi di C ($V_C = 195V$) è maggiore della tensione ai capi di L ($V_L = 21,16V$).

Per calcolare la potenza erogata dal circuito, uguale a quella erogata dal generatore E , non basta moltiplicare, come si fa in corrente continua, i valori efficaci di E ed I , ma bisogna tener conto dello sfasamento φ tra tensione e corrente e quindi fare uso del prodotto scalare di 2 vettori.

$$P = EI \cos \varphi = 220 \cdot 0,1348 \cos(-52,21^\circ) =$$

↑
potenza
attiva erogata
dal circuito

$$= \boxed{220 \cdot 0,1348} \cdot 0,6127 = 18,17 W$$

↓
29,65 VA

Il prodotto EI definisce invece la potenza apparente, ben diversa dall'effettiva potenza erogata. ($A = EI = 220 \cdot 0,1348$)

↑
potenza
apparente

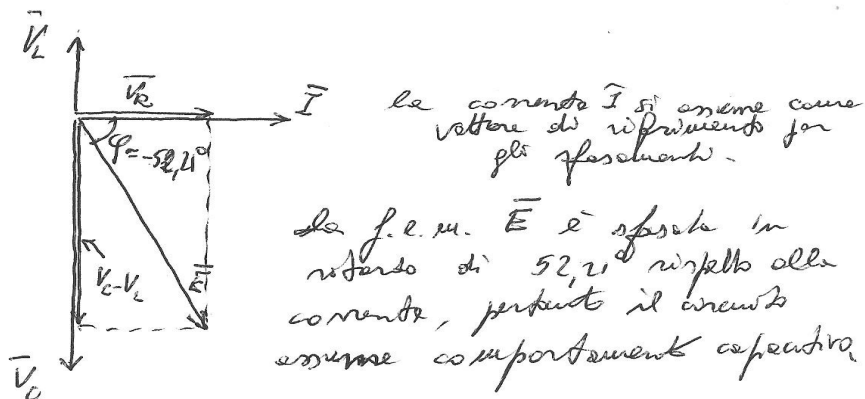
$$29,65 VA$$

Voltampere
non watt!!

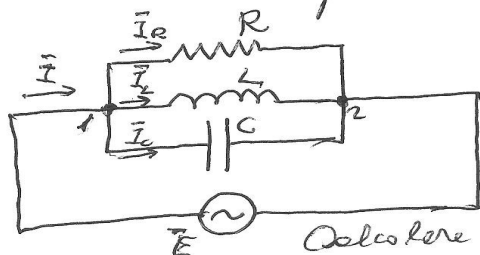
Se in particolare fosse pari a 90° lo sfasamento tra corrente e tensione [circuito con una sola induttanza ideale (nessa resistenza ohmica)] o con una sola condensatore, la potenza attiva sarebbe nulla (corrente smazzettata).

Diagramma vettoriale delle tensioni

14



Esempio 2: Circuito RLC parallelo



$$R = 10 \text{ k}\Omega$$

$$L = 9 \text{ H}$$

$$C = 1 \mu\text{F}$$

$$E = 220 \text{ V} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$$

Calcolare Y, Z, I, ϕ

Consideriamo il nodo 1 ed applichiamo la legge di Kirchhoff, che in questo caso richiede l'annullamento della somma vettoriale delle correnti confluenti nel nodo.

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C$$

corrente totale

Tenendo presenti le relazioni vettoriali precedentemente considerate per il circuito RLC-serie, otteniamo:

$\bar{V}_R = \bar{V}_L = \bar{V}_C = \bar{E}$, essendo gli elementi collegati in parallelo.

$$\begin{cases} \bar{E} = R \bar{I}_R \\ \bar{E} = j\omega L \bar{I}_L \\ \bar{E} = -\frac{j}{\omega C} \bar{I}_C \end{cases} \quad \begin{aligned} &\longrightarrow \bar{I}_R = \frac{\bar{E}}{R} \\ &\longrightarrow \bar{I}_L = \frac{\bar{E}}{j\omega L} = \frac{j \cdot \bar{E}}{j \cdot j\omega L} = \frac{j \bar{E}}{-\omega L} = -\frac{j \bar{E}}{\omega L} \end{aligned}$$

$j^2 = -1$

$$\bar{E} = -\frac{j \cdot j \bar{I}_C}{j\omega C} = -\frac{(-1) \bar{I}_C}{j\omega C} = \frac{\bar{I}_C}{j\omega C} \quad ; \quad \bar{I}_C = j\omega C \bar{E}$$

$$\begin{cases} \bar{I}_R = G \bar{E} \\ \bar{I}_L = -j B_L \bar{E} \\ \bar{I}_C = j B_C \bar{E} \end{cases} \quad , \quad \text{dove } G = \frac{1}{R} \text{ è la conduttanza (S)}$$

B_L è la suscettanza induttiva, data dall'inverso della reattanza induttiva

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$$

B_C è la suscettanza capacitiva, data dall'inverso della reattanza capacitiva

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{\frac{1}{\omega C}} = \omega C$$

Portando sostituito ^{nell'espressione} della I legge di Kirchhoff alle correnti $\bar{I}_R$, $\bar{I}_L$ e $\bar{I}_C$ le espressioni trovate, si ha:

$$\bar{I} = G \bar{E} - j B_L \bar{E} + j B_C \bar{E} = \underbrace{[G + j(B_C - B_L)]}_{\bar{Y}} \bar{E}$$

Il numero complesso $\bar{Y} = G + j(B_C - B_L)$ prende il

nome di ~~imp~~ ammettanza del circuito, ed è definita dal rapporto tra i vettori $\bar{I}$ ed $\bar{E}$; l'ammettanza è l'inverso dell'impedenza e rappresenta la potenza in alternata del concetto di conduttanza.

$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{E}} = G + jB$$

dove B è la suscettanza totale, somma algebrica delle suscettanze induttive e capacitive.

Il modulo di $\bar{Y}$ si misura in Siemens (S) ed è dato dall'espressione:

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

L'argomento φ è dato da $\arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}}$ e rappresenta lo sfasamento tra corrente e tensione.

Sostituendo nelle espressioni di Y e di φ i valori numerici espressi per il circuito RLC parallelo, otteniamo:

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{\left(\frac{1}{10^4}\right)^2 + \left(314 \cdot 10^6 - \frac{1}{314 \cdot 2}\right)^2} = \sqrt{10^8 + \left(314 \cdot 10^6 - \frac{1}{628}\right)^2} \\ &= \sqrt{10^8 + (314 \cdot 10^6 - 1,592 \cdot 10^{-3})^2} = \sqrt{10^8 + (-1,278 \cdot 10^3)^2} = \sqrt{1,633 \cdot 10^6} = 1,277 \cdot 10^3 \text{ S} \end{aligned}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{1,27 \cdot 10^{-3}} = 783,0 \Omega$$

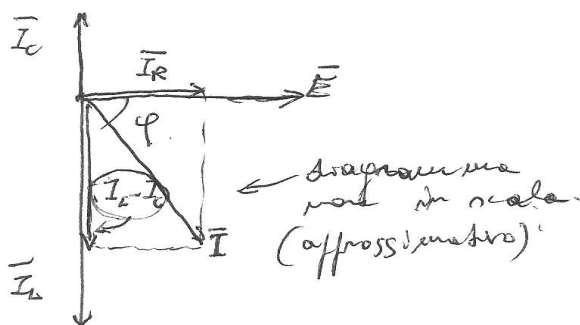
$$I = \frac{E}{Z} = EY = \frac{220}{783} = 0,28 \text{ A}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = \arctan \frac{314 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{314 \cdot 2}}{\frac{1}{10^4}} =$$

$$= \arctan \frac{-1,278 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = \arctan (-12,78) = -85,52^\circ$$

La ~~corrente~~ corrente $\vec{I}$ è sfasata da $85,52^\circ$ in ritardo rispetto alla tensione $\vec{E}$, pertanto il circuito assume comportamento induttivo.

Diagramma vettoriale delle correnti.
Assumendo come vettore di riferimento la tensione $\vec{E}$, uguale per tutti gli elementi collegati in parallelo, si ha:



Risonanza nei circuiti RLC serie ed RLC paralleli.

18

In entrambi i circuiti si verifica la condizione di risonanza quando si annulla lo sfasamento ϕ tra tensione E e corrente I e l'impedenza (ammettenza) si riduce ad un numero reale. Nel caso del circuito RLC serie l'impedenza $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ si riduce alla sola resistenza ohmica R e pertanto la corrente circolante raggiunge il massimo valore possibile, finché ~~non~~ sia soddisfatta la condizione di risonanza espressa dall'annullamento della reattanza totale j ~~da~~ in corrispondenza di un ben determinato valore f_0 di f .

$$(*) \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad X_L = X_C = 0$$

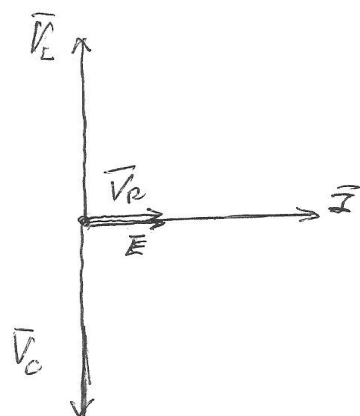
Il valore f_0 , cui corrisponde $\omega_0 = 2\pi f_0$ prende il nome di frequenza di risonanza e si calcola risolvendo l'equazione (*) rispetto a f_0 :

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C} \Rightarrow LC = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

Lo sfasamento $\phi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ si annulla per $f = f_0$, avendo nulla la reattanza totale; pertanto il circuito esprime comportamento resistivo con i voltaggi E ed I in fase (paralleli).

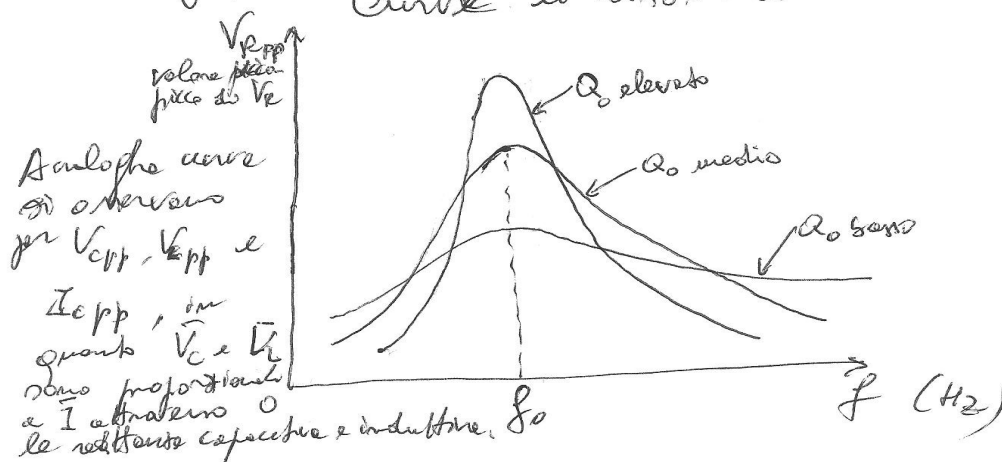
Diagramma vettoriale delle tensioni in condizione di risonanza.



I vettori V_L e V_C si annullano esattamente ed il vettore V_R coincide con la p.e.m. E del generatore; pertanto tutte le tensioni E risultano effettive ed R e la corrente risultano massima.

Se si rilevano sperimentalmente i valori di V_R , V_L e V_C al variare della frequenza, si nota che tutte e tre le grandezze presentano un massimo più o meno marcato in corrispondenza della frequenza di risonanza.

Curve di risonanza.



20
 Per ogni curva di risonanza, a seconda delle resistenze ohmiche presenti nel circuito, si definisce un coefficiente di sovratensione o fattore di merito Q_0 del circuito, dato dal rapporto, alla risonanza, tra V_{pp} e la f.e.m. E_{pp} del generatore, oppure tra V_{pp} ed E_{pp} .

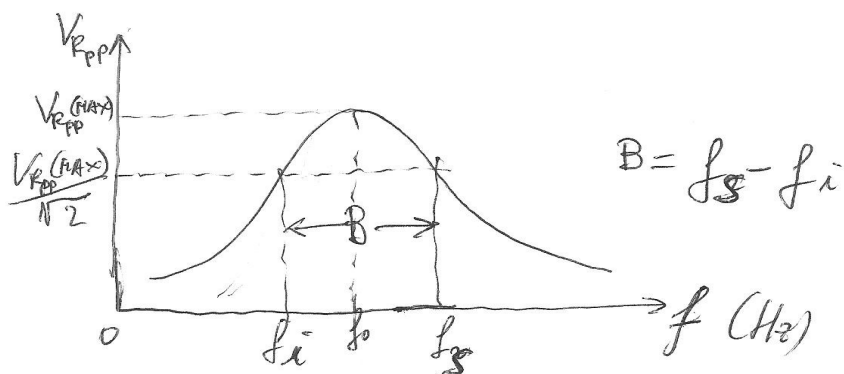
$$Q_0 = \frac{V_{pp}}{E_{pp}} = \frac{I_{pp} \frac{1}{\omega_0 C}}{R I_{pp}} = \frac{1}{\omega_0 R C}$$

$$\text{oppure } Q_0 = \frac{V_{Lpp}}{E_{pp}} = \frac{I_{pp} \omega_0 L}{R I_{pp}} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Il coefficiente Q_0 esprime con il suo valore ($\gg 1$) l'altitudine ~~del circuito~~ ~~del circuito~~ a rispondere con tensioni elevate ai capi degli elementi reattivi (L e C) in condizione di risonanza, ^{quanto risonanza} ~~deflessione~~ piccolo segnale di eccitazione (f.e.m. E).

Questa proprietà ~~del~~ alle box del funzionamento di tutti i circuiti Radio-TV sintonizzati ad alte frequenze, ed è quella che consente di sintonizzare il ricevitore nell'eventuale desiderata.

Si nota che, a parità di L e di C , aumentando le perdite ohmiche del circuito, cioè R , si riduce il fattore Q_0 e si ottiene una curva di risonanza più larga, poco adatta per ottenere una buona selettività, cioè una buona separazione tra emittenti vicine in frequenza.



Per ogni curva di risonanza, corrispondente ad un certo valore di Q_0 , si definiscono le frequenze di taglio inferiore f_i e superiore f_s a -3 dB , che sono i valori di f in corrispondenza dei quali la risposta del circuito (V_R, V_L, V_C o I_C) si abbassa di 3 dB rispetto al valore massimo, o in modo equivalente, si abbassa al valore $\frac{V_{RPP(MAX)}}{\sqrt{2}} = 0,707 V_{RPP(MAX)} = 70,7\% V_{RPP(MAX)}$.

La relazione che lega B e Q_0 è la seguente: $Q_0 = \frac{f_0}{B}$, da cui si

deduce che, a parità di frequenza di risonanza f_0 , la differenza B tra f_s ed f_i (larghezza di banda o banda passante a -3 dB) è tanto più piccola, e quindi il circuito è tanto più selettivo, quanto maggiore è il fattore Q_0 .

Risonanza in un circuito RLC parallelo.

In questo caso la risonanza, detta anche antirisonanza, si ha quando si annulla la suscettanza totale, cioè quando la suscettanza induttiva compensa ~~quella~~ quella capacitiva:

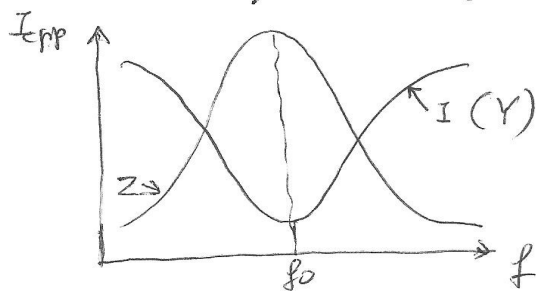
$$\bar{Y} = G + j \underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}_0$$

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

$$\text{per } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

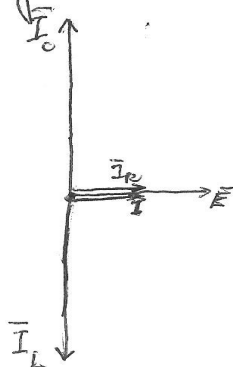
Si ottiene la stessa condizione di risonanza trovata per il circuito serie; si annulla contemporaneamente lo sfasamento ϕ tra E ed I ed il circuito assume comportamento resistivo.

In questo caso, però, riducendosi l'ammittanza $\bar{Y}$ alla sola conduttanza, risulta massima l'impedanza del circuito $Z = \frac{1}{\bar{Y}}$ e risulta invece minima la corrente da esso assorbita.



Anche nel caso delle risonanze parallele si definiscono il fattore di qualità Q_0 o coefficiente di sintonia e la larghezza di banda B . $Q_0 = \frac{f_0}{B}$

Inoltre, nel caso della risonanza parallela si fa riferimento al disprezzo istantaneo delle correnti:



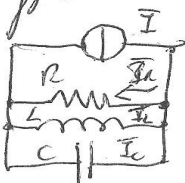
I_C ed I_L si annullano esattamente ed il vettore I_R coincide con la corrente erogata dal generatore E , che risulta minima essendo minima l'ammettanza Y e massima l'impedenza Z .

Le correnti I_C e I_L possono essere, a seconda del valore di Q_0 , valori molto maggiori di I .

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 = \frac{I_C}{I} = \frac{\omega_0 C E}{\frac{E}{R}} = R \omega_0 C \\ Q_0 = \frac{I_L}{I} = \frac{\frac{E}{\omega_0 L}}{\frac{E}{R}} = \frac{R}{\omega_0 L} \end{array} \right.$$

$I \leftarrow$ corrente erogata dal generatore $= I_R = \frac{E}{R}$

Se la risonanza delle risonanze RLC-parallele si effettua con un generatore di corrente sinusoidale, si osserva un massimo della tensione ai capi del circuito RLC per $f = f_0$.



Formule di trasformazione serie-parallelo

Dato un circuito RLC serie, schematizzabile con un resistore R collegato in serie con un elemento reattivo avente reattanza totale X , si considera l'impedenza $\bar{Z} = R + jX$ e si suffraga di voler trovare il circuito equivalente di tipo parallelo corrispondente al circuito dato.



circuito serie.

circuito equivalente di tipo parallelo

Si faette di determinare la conduttanza G e la suscettanza totale B in modo che la risultante ammettente $\bar{Y} = G + jB$ coincida con l'inverso dell'impedenza $\bar{Z} = R + jX$ del circuito dato. Si ha in particolare quanto segue:

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} \\ &= \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \left[\frac{R}{R^2 + X^2} \right] - \frac{jX}{R^2 + X^2} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ G &= \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \\ &\text{conduttanza} \quad \quad \text{suscettanza totale.}\end{aligned}$$

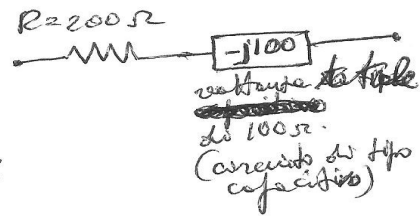
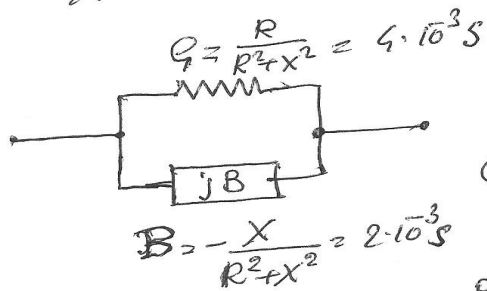
Si note de se la reatância total - em z positiva,
 a reatância total-parallel é negativa, e vice-versa.

Exemplo.

$$\underline{Z} = R + jX$$

$$\underline{Z} = 200 - j100$$

$$X = -100 \Omega$$

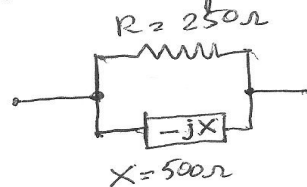


$$G = \frac{200}{200^2 + 100^2} = \frac{100}{5 \cdot 10^4} = 4 \cdot 10^{-3} S$$

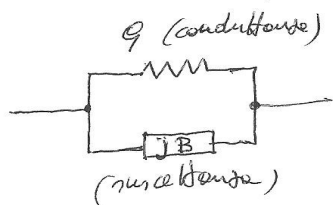
$$B = -\frac{(-100)}{200^2 + 100^2} = \frac{100}{5 \cdot 10^4} = 2 \cdot 10^{-3} S$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = 250 \Omega$$

Portanto o circuito equivalente paralelo é
 composto de um resistor de 250 Ω em paralelo
 com uma reatância capacitiva de $\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}}$ 500 Ω .



Viceversa, dato un circuito di tipo parallelo, si può ottenere con le formule inverse il circuito equivalente di tipo serie



$$\bar{Y} = G + jB$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{(G + jB)(G - jB)} = \frac{G}{G^2 + B^2} - \frac{jB}{G^2 + B^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad , \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$\bar{Z} = R + jX$$

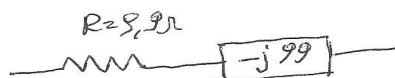
Se $G = 10^3 \text{ S}$ e $B = 10^2 \text{ S}$ (susettanza capacitiva)

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{10^3}{(10^3)^2 + 10^4} = \frac{10^3}{10^6 + 10^4} = \frac{10^3}{1.01 \cdot 10^6} \approx 9.9 \Omega$$

$$X = -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{10^2}{1.01 \cdot 10^6} \approx -99 \Omega \quad (\text{reattanza capacitiva})$$

$$Z \approx 9.9 - j99$$

$$Z = R + jX$$



Funzione di trasferimento di una rete quadripolare RLC - Riferita in frequenza - - Esempi -

Consideriamo il semplice esempio di una rete RC (fig. 1) eccitata da un generatore sinusoidale $\bar{V}_i$, la cui frequenza possa essere variata in un intervallo abbastanza grande (es. da 1 Hz a 1 MHz). Ci proponiamo di studiare l'andamento del segnale d'uscita $\bar{V}_o$ che si ottiene come risposta all'eccitazione $\bar{V}_i$, al variare della frequenza. Il problema si può affrontare sia teoricamente che sperimentalmente.

1) Rilievo sperimentale della risposta in frequenza
Con riferimento alla fig. 2

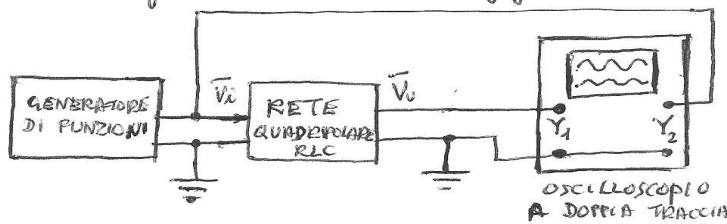


fig. 2.

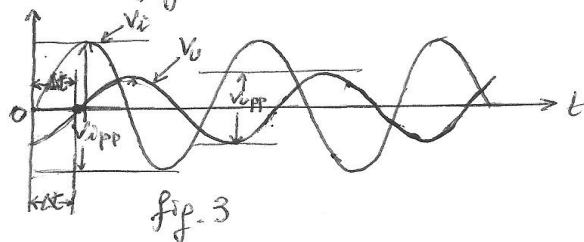


fig. 3

consente di ottenere lo sfasamento φ tra $\bar{V}_0$ e $\bar{V}_i$:

$$\varphi = \Delta t \cdot \frac{360}{T} \quad (\text{in gradi}) \quad \varphi = \Delta t \cdot \frac{2\pi}{T} \quad (\text{in radianti})$$

$$T = \frac{1}{f}$$

Si può pertanto costruire la seguente tabella:

V_{ipp} = costante (valore prescelto per il regime di eccitazione)

f (Hz)	V_{ipp} (V)	$ F(j\omega) = \frac{V_{ipp}}{V_{ipp}}$	Δt (s)	$\varphi = \Delta t \cdot \frac{360}{T}$ (gradi)	$\varphi = \Delta t \cdot \frac{2\pi}{T}$ (radianti)	Modulo di $F(j\omega)$ in dB $F_{dB} = 20 \lg \frac{V_{ipp}}{V_{ipp}}$
10						
10 ²						
10 ³						
10 ⁴						
10 ⁵						
10 ⁶						

$|F(j\omega)| = \frac{V_{ipp}}{V_{ipp}}$ è il modulo della funzione di trasferimento $F(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i}$, e si ottiene facendo il rapporto tra i valori picco-picco della risposta e dell'eccitazione.

Si hanno così tutti gli elementi necessari per tracciare i 2 diagrammi di Bode, uno per il modulo di $F(j\omega)$, espresso in dB, ed uno per la fase φ (gradi).

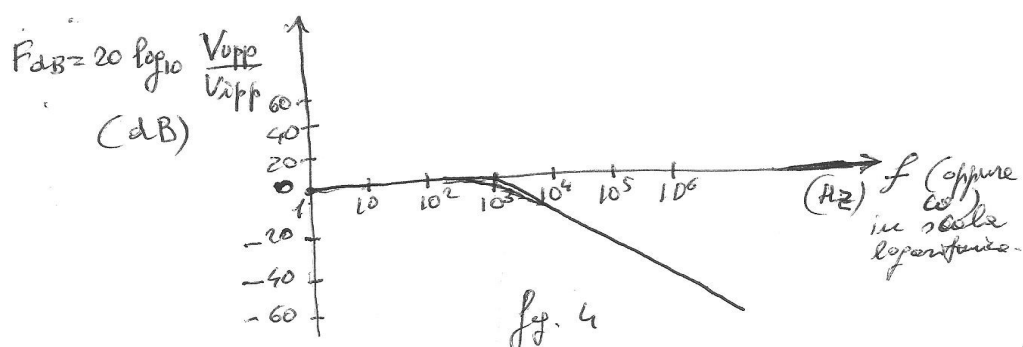


Diagramma di Bode del modulo di $F(j\omega)$

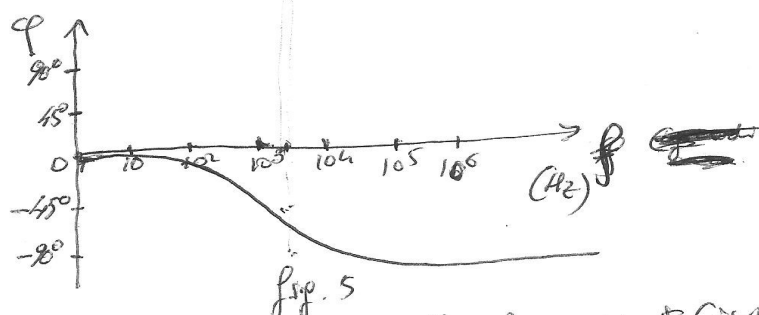
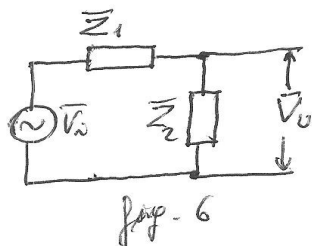


Diagramma di Bode della fase di $F(j\omega)$

2) Calcolo della funzione di trasferimento delle rete RC di fig. 1.



La fig. 6 schematizza la rete RC mediante le impedenze $\bar{Z}_1$ e $\bar{Z}_2$, che costituiscono un partitore di tensione.

$\bar{Z}_1$ si riduce alla resistenza R , $\bar{Z}_2$ alla reattanza capacitiva di C ; pertanto si ha:

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_i \cdot \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \bar{V}_i \cdot \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}}$$

$$\frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}}$$

Manipolando l'espressione ottenuta, si ha:

$$\frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \frac{-\frac{j \cdot j}{j \omega C}}{R - \frac{j \cdot j}{j \omega C}} = \frac{\frac{1}{j \omega C}}{R + \frac{1}{j \omega C}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{j \omega C}}{\frac{R \cdot j \omega C + 1}{j \omega C}} = \frac{1}{1 + j \omega RC}$$

$$F(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \frac{1}{1 + j \omega RC}$$

Ricordando le proprietà del quoziente di 2 numeri complessi, si ha:

$$|F(j\omega)| = \frac{V_{upp}}{V_{app}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

modulo

(quoziente dei moduli del numeratore e del denominatore di $F(j\omega)$)

$$\varphi = 0 - \arctan \omega RC$$

Componente = differenza tra gli argomenti del numeratore e del denominatore

$$\varphi = -\arctan \omega RC$$

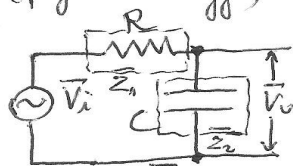
(argom. di $1 + j \omega RC$)

Calcolo di funzioni di trasferimento di reti quadripolari RLC.

Un metodo semplificato per il calcolo delle funzioni di trasferimento di una rete consiste nell'esprimere le reattanze di ogni suo elemento in funzione della variabile $s = j\omega$, nota come variabile di Laplace, in quanto nella forma complessa $s = \alpha + j\omega$ figura nella trasformata di Laplace, che servono a ricavare la risposta di una rete ad un'eccitazione di tipo qualsiasi. Nel caso di eccitazione sinusoidale è sufficiente considerare la sola parte immaginaria di s , ed esprimere reattanze e suscettanze induttive e capacitive in funzione di s .

Esempio:

- 1) Filtro RC passa-basso di I ordine, già considerato (pag. 27 e segg.)



$$\bar{V}_o = \bar{V}_i \frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_L}$$

$$\bar{V}_o = \frac{\bar{V}_i \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$\frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{RSC + 1}{sC}} = \frac{1}{1 + RSC} \quad \leftarrow j\omega$$

La reattanza capacitiva di C si può esprimere come $\frac{1}{sC}$; infatti si ha: $-\frac{j}{\omega C} = \frac{-j \cdot j}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{sC}$
($j^2 = -1$) ($s = j\omega$)

$$\begin{cases} \bar{Z}_1 = R \\ \bar{Z}_L = \frac{1}{sC} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} F(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \\ \text{avendo sostituito} & \\ & \text{a } s \text{ } j\omega \end{aligned} \right\}$$

Il filtro RC prende il nome di passa-basso, in quanto lascia passare senza attenuazione tutte le frequenze minori della cosiddetta frequenza di taglio f_t (a -3 dB), che è la frequenza in corrispondenza della quale la risposta $\bar{V}_o$ si abbassa di 3 dB rispetto alla risposta che si ottiene per frequenze molto minori di f_t .

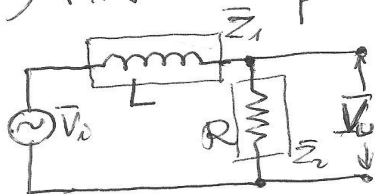
L'ordine della funzione di trasferimento è pari al numero dei poli della ~~funzione di trasferimento~~ ~~funzione di trasferimento~~, cioè al numero dei valori di s che annullano il denominatore della funzione di trasferimento, la quale ha la struttura matematica di una funzione razionale frazionaria.

La funzione di trasferimento $F(s) = F(j\omega) =$

$$= \frac{1}{1+RCs} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$
 è di I ordine

in quanto è unica la radice del denominatore. Il denominatore $1+RCs$ si annulla infatti per $s = -\frac{1}{RC}$.

2) Filtro LR passa-basso di I ordine



$$\bar{Z}_1 = j\omega L = sL \quad \text{reattanza induttiva di } L$$

$$\bar{Z}_2 = R$$

Applicando la legge del partitore di tensione

alle impedenze $\bar{Z}_1$ e $\bar{Z}_2$, si ha:

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_i \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} ; \quad F(s) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \frac{R}{sL + R} = \frac{1}{1 + s \frac{L}{R}}$$

funzione
di trasferimento

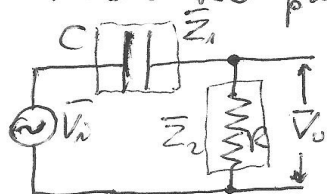
polo: $s = -\frac{R}{L}$

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

Si ottiene con una funzione di trasferimento di I ordine analoga matematicamente a quella del filtro RC passa-basso precedente.

$$|F(j\omega)| = \frac{V_{opp}}{V_{i,pp}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}} \quad \left| \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega L}{R} \right.$$

3) Filtro RC passa-alto di I ordine



$$\bar{Z}_1 = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{sC} \quad \text{reattanza capacitiva di } C$$

$$\bar{Z}_2 = R$$

Applicando la legge del partitore di tensione, si ha:

$$\bar{V}_0 = \frac{\bar{V}_i \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

$$\bar{V}_0 = \frac{\bar{V}_i R}{\frac{1}{sC} + R}$$

$$F(s) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \frac{R}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{R}{\frac{1 + RCs}{sC}} = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

zero: $s = 0$

polo: $s = -\frac{1}{RC}$

$$F(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

In questo caso, oltre alla presenza del polo, radice del denominatore, si nota la presenza di uno zero; infatti la funzione di trasferimento si annulla per $s=0$, cioè per $\omega=0$. Il numero degli zeri non influenza l'ordine della funzione di trasferimento, che dipende soltanto dal numero dei poli, cioè dalle radici che annullano il denominatore e ~~che~~ tendono divergente all' ∞ la funzione di trasferimento.

Calcoliamo il modulo e l'argomento di $F(j\omega)$:

$$|F(j\omega)| = \frac{\omega RC \leftarrow \text{modulo del numeratore}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2} \rightarrow \text{modulo del denominatore}}$$

modulo di $F(j\omega)$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC)$$

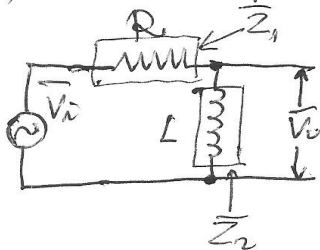
argomento di $F(j\omega)$ (phasor tra $\bar{V}_0$ e $\bar{V}_i$)

argomento del numeratore

argomento del denominatore

Essendo il filtro di tipo passa-alto, passano senza attenuazione tutte le frequenze al di sopra della frequenza di taglio f_t a -3 dB, mentre quelle con frequenza minore di f_t vengono sensibilmente attenuate.

4) Rete RL passa-basso di I ordine.



$$\bar{Z}_1 = R$$

$$\bar{Z}_2 = j\omega L = sL$$

reattanza induttiva di L

$$F(s) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i}$$

$$\bar{V}_o = \frac{\bar{V}_i \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{\bar{V}_i sL}{R + sL}$$

$$\frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s \frac{L}{R}}{1 + s \frac{L}{R}}$$

$$= \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

↑
zero: $s = 0$
↑
polo: $s = -\frac{R}{L}$

Anche in questo caso, accanto alla presenza del polo $s = -\frac{R}{L}$, si nota la presenza dello zero $s = 0$.

$$|F(j\omega)| = \frac{V_{opp}}{V_{ipp}} = \frac{\omega \frac{L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

modulo di $F(j\omega)$

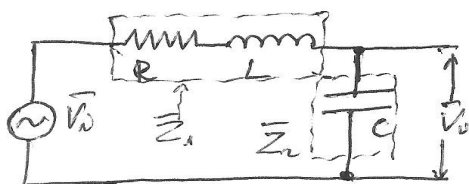
cp = $\frac{\pi}{2}$ (arg. num.)

argomenti di $F(j\omega)$

arg. $\frac{\omega L}{R}$

arg. denominatore.

5) Filtro RLC di II ordine (passa-banda)



$$Z_1 = R + sL$$

$$Z_2 = \frac{1}{sC}$$

$$\bar{V}_O = \frac{\bar{V}_N Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\bar{V}_O = \frac{\bar{V}_N \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$P(s) = \frac{\bar{V}_O}{\bar{V}_N} = \frac{\frac{1}{sC}}{RCs + s^2LC + 1} = \frac{1}{RCs + s^2LC + 1} = \frac{1}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} \quad (s = j\omega)$$

Il denominatore possiede 2 radici (poli) e pertanto la funzione $P(s)$ è di II ordine.

poli:

$$s^2LC + RCs + 1 = 0$$

$$s = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}$$

modulo di $P(j\omega)$

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\underbrace{+\omega^2 LC}_{\text{parte reale di } P(j\omega)}})^2 + (\underbrace{\omega RC}_{\text{coeff. parte immaginaria}})^2}$$

$$\varphi = 0 - \arctan \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$$

arg. numeratore arg. denominatore

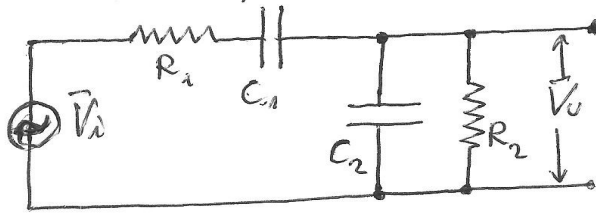
In pratica vengono fatti passare tutti i segnali con frequenze molto vicine a quella di risonanza $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

mentre vengono attenuati sensibilmente quelli con $f \ll f_0$ e con $f \gg f_0$ (filtro passa-banda)

$$\varphi = -\arctan \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$$

6) Filtro a ~~guirponte~~ di Wien (passa-banda di II ordine)

38



Si pone $\bar{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{sC_1}$

$\bar{Y}_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{R_2}\right)}_{\text{conduttanza}} + j\omega \underbrace{C_2}_{\text{susettanza capacitiva}}$
 ↑
 ammettenza di R_2 e C_2

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + sC_2 = \frac{1 + R_2 C_2 s}{R_2}$$

$\bar{Z}_2 = \frac{1}{\bar{Y}_2} = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s}$
 ↑
 impedenza di R_2 e C_2

Applicando la legge del partitore di tensione si ha:

$$\bar{V}_o = \frac{\bar{V}_i \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \bar{V}_i \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1} + \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s}}$$

$$F(s) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{\frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s}}{\frac{R_1 s C_1 (1 + R_2 C_2 s) + (1 + R_2 C_2 s) + R_2 s C_1}{s C_1 (1 + R_2 C_2 s)}} = \frac{R_2 C_1 s}{(R_1 s C_1 + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + 1 + R_2 C_1 s + R_2 C_2 s)^2}$$

$s = j\omega$

$$F(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{j\omega R_2 C_1}{j\omega R_1 C_1 + R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 + 1 + R_2 C_1 j\omega + R_2 C_2 j\omega}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{V_{opp}}{V_{ipp}} = \frac{\omega R_2 C_1}{\sqrt{(1 + \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2)^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)^2 \omega^2}}$$

(F(s) possiede 2 poli ed uno zero)
 $s=0$

Dall'espressione del modulo di $|K(j\omega)|$ si nota che il rapporto $\frac{V_{opp}}{V_{app}}$ presenta un massimo quando si annulla la parte reale del denominatore di $P(j\omega)$; $1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 = 0$.

Pertanto il circuito manifesta un comportamento di tipo passa-banda nell'intorno della frequenza di risonanza: $\omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$; $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$.

$$\varphi = \arg. \text{numeratore} - \arg. \text{denominatore} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \omega}{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

Per $f = f_0$ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg \infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$,
cioè $\bar{V}_0$ e $\bar{V}_i$ sono in fase.

$|K(j\omega)|$ per $f = f_0$ diventa:

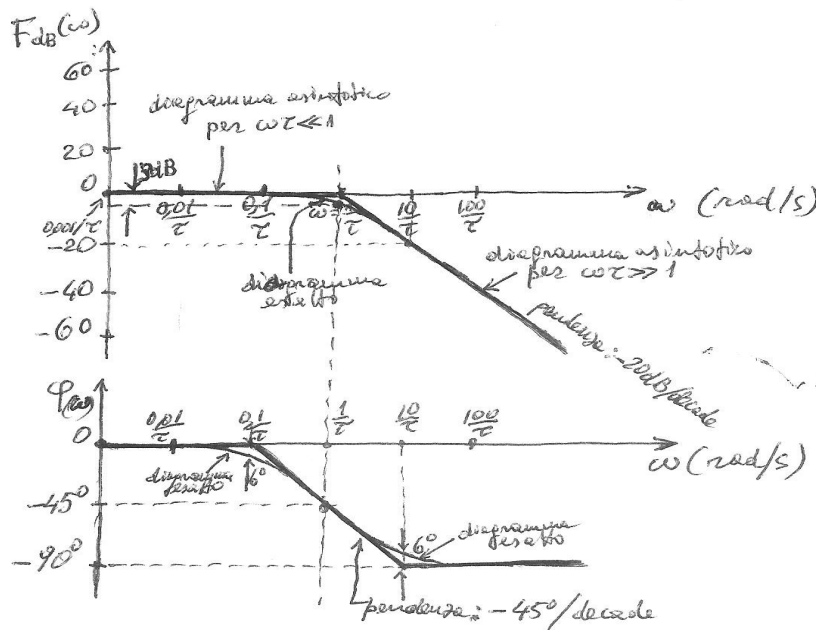
$$= \frac{\omega_0 R_2 C_1}{\sqrt{(1 - \omega_0^2 R_1 R_2 C_1 C_2) + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)^2 \omega_0^2}} = \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1}$$

$$\frac{V_{opp}}{V_{app}} = \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1} \quad \text{per } f = f_0 \text{ (risonanza)}$$

Se, in particolare, $R_1 = R_2 = R$ e $C_1 = C_2 = C$, si ha:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad \frac{V_{opp}}{V_{app}} = \frac{RC}{RC+RC+RC} = \frac{1}{3} \quad \text{per } f = f_0$$

espresso in dB, e per l'argomento ϕ (sfasamento tra V_o e V_i)



Per semplicità abbiamo utilizzato un sistema di asse logaritmiche espresse in funzione della ~~frequenza~~ ^{pulseriana} di taglio del filtro $\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$ (-3 dB), considerando come intervallo elementare un intervallo pari ad 1 decade, cioè la distanza tra 2 valori di ω il cui rapporto sia 10 (Es.: $\frac{0.01}{\tau} \dots \frac{0.1}{\tau}$; $\frac{10}{\tau} \dots \frac{100}{\tau}$).

Si noti che in un sistema di asse logaritmiche sono equidistanti i punti corrispondenti a potenze consecutive di 10 e che l'origine non coincide mai con lo zero, per potenze ~~corrispondere a~~ una frequenza decimale molto piccola ($10^{-4} \dots 10^{-5}$).

Tracciamo anzitutto il diagramma asintotico (approssimato) del modulo di $F(j\omega)$.

Per pulsazioni molto minori di $\omega_t = \frac{1}{\tau}$, si ha:

$$\omega \ll \frac{1}{\tau}, \quad \omega\tau \ll 1$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \approx 1 \quad F_{dB} = 20 \log_{10} |F(j\omega)| =$$

(modulo in dB)

$$= 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

si trascura $(\omega\tau)^2$

Si traccia pertanto la prima parte del diagramma asintotico nella zona delle pulsazioni molto minori di $\omega_t = \frac{1}{\tau}$ (retta composta tra l'origine del sistema di asse logaritmiche ed il punto $\omega = \frac{1}{\tau}$).

Per pulsazioni molto maggiori di $\omega_t = \frac{1}{\tau}$, si ha:

$$\omega \gg \frac{1}{\tau}, \quad \omega\tau \gg 1$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \approx \frac{1}{\omega\tau} \quad F_{dB} = 20 \log_{10} |F(j\omega)| =$$

si trascura l'unità

$$= 20 \log_{10} \frac{1}{\omega\tau} =$$

$$= \cancel{20 \log_{10} 1} - 20 \log_{10} \omega\tau$$

0

$$F_{dB} = -20 \log_{10} \omega\tau \quad (\text{Retta con pendenza di } -20 \text{ dB/decade})$$

Per tracciare la retta consideriamo il punto corrispondente a $\omega = \frac{1}{\tau}$, ~~perché~~ $(F_{dB}(\omega) = -20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB})$, ed il punto corrispondente a $\omega = \frac{10}{\tau}$ (distanza 1 decade da $\omega = \frac{1}{\tau}$): $F_{dB}(\omega = \frac{10}{\tau}) = -20 \log_{10} \frac{10}{\tau} = -20 \text{ dB}$.

La retta tracciata costituisce la seconda parte del diagramma asintotico, relativa alle pulsazioni maggiori di quella di taglio ($\omega_c = \frac{1}{\tau}$).

Unendo le 2 parti del diagramma, si ottiene il diagramma asintotico completo, che è affetto da un errore di 3 dB rispetto al diagramma effettivo (esatto) in corrispondenza della pulsazione di taglio. Infatti per $\omega = \frac{1}{\tau RC}$ (pulsazione di taglio a -3dB), si ha:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \underbrace{(\omega\tau)^2}_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{per } \omega = \frac{1}{\tau} \quad (\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}})$$

$$= 20 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} \sqrt{2} = -20 \log_{10} 2 = -10 \log_{10} 2 = -10 \cdot 0,3 = -3 \text{ dB}.$$

La pulsazione $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, definita come pulsazione di taglio a -3dB, è la pulsazione in corrispondenza della quale la risposta si abbassa di 3dB rispetto alla risposta che si ottiene a frequenze molto basse.

Analogamente si definisce la frequenza di taglio a -3dB $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi RC}$.

Per ottenere il diagramma di Bode della fase φ di $F(j\omega)$, bisogna considerare i valori limite di φ per $\omega\tau \ll 1$ e per $\omega\tau \gg 1$.

$$\varphi = -\arctan \omega\tau = \begin{cases} \text{per } \omega\tau \ll 1, & \varphi \approx 0 \\ \text{per } \omega\tau \gg 1, & \varphi = -\arctan \omega\tau \text{ tende a } -90^\circ \end{cases}$$

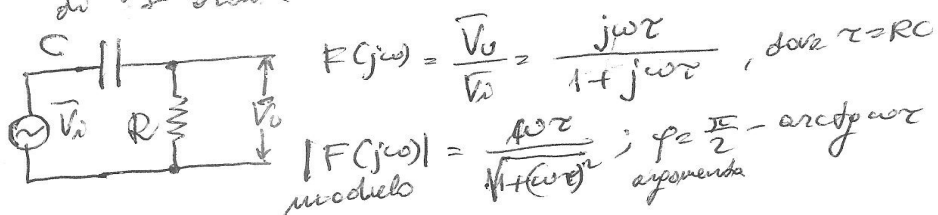
Portando si hanno due tratti asintotici
orizzontali; ^{rispettivamente} di equazione $\varphi = 0$ per frequenze
molto minori di quella di taglio, e di equazione $\varphi = -90^\circ$
per frequenze molto maggiori di quella di taglio.

In pratica l'errore tra il grafico esatto e
quello approssimato è di circa 60 s.e. per $\omega = \frac{1}{\tau}$,
e per $\omega = \frac{10}{\tau}$, per cui il grafico approssimato,
completo, si può ottenere aggiungendo ai due tratti
asintotici orizzontali un terzo tratto obliquo con
pendenza di -45° per decade.

In particolare, per $\omega = \frac{1}{\tau}$ (guadagno di taglio a
 -3dB), la fase assume il valore di -45°

$\varphi(\omega) = \arctg \omega\tau = -\arctg 1 = -45^\circ$
($\omega = \frac{1}{\tau}$). Si nota altresì che V_o è sempre ^{più} faseata in
rispetto a V_i , e l'errore della frequenza.

Diagramma di Bode di un filtro RC passa-alto
di I ordine.



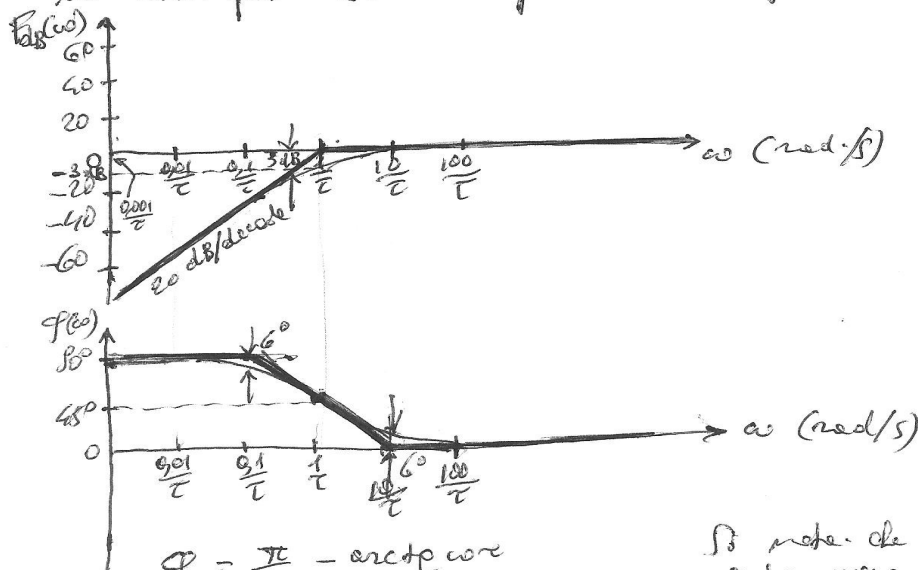
Per $\omega\tau \ll 1$ $|F(j\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \approx \omega\tau$; $F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |F(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega\tau$
si trascura $\omega\tau$

Si ottiene un tratto asintotico con pendenza di 20 dB/decade
nella zona delle frequenze minori di quella di taglio a -3dB

Per $\omega \gg 1$ $|F(j\omega)| = \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \approx 1$; $F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |F(j\omega)| \approx 0$
si trascura l'unità

Si ottiene un tratto asintotico orizzontale ~~a partire~~ da $\omega = \frac{1}{\tau}$ ed esteso verso le alte frequenze.

Ritornando ai due tratti, si ottiene il diagramma asintotico completo, che differisce di 3 dB dal quello esatto in corrispondenza della pulsazione di taglio $\omega = \frac{1}{\tau}$ e -3 dB.



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \omega \tau$$

per $\omega \tau \ll 1$ $\varphi \approx \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

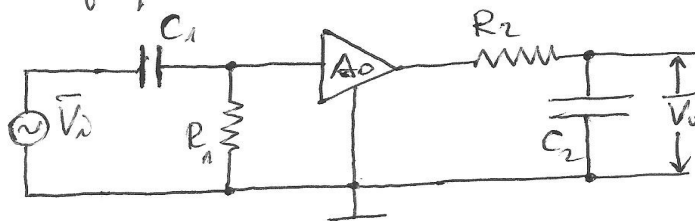
per $\omega \tau \gg 1$ $\varphi \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

Si nota che φ è sempre meno sfasato in anticipo rispetto a $\frac{\pi}{2}$ al crescere della frequenza.

Si definisce frequenza di taglio e -3 dB del filtro passa-alto, la frequenza $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ in corrispondenza della quale la risposta si abbassa di 3 dB rispetto alla risposta che si ottiene alle alte frequenze. La dimostrazione è analoga a quella del filtro passa-basso.

Diagrammi di Bode di un filtro passa-banda di II ordine

Consideriamo un filtro passa-banda ottenuto collegando in cascata 2 filtri RC, uno passa-basso ed uno passa-alto attraverso uno stadio di disaccoppiamento dotato di amplificazione A_0 costante al variare della frequenza ($A_0 \geq 1$)



Lo stadio A_0 non è necessario per fare in modo che l'impedenza serie $R_2 + \frac{1}{sC_2}$ della seconda cella RC non carichi l'uscita della prima cella alterando il valore della frequenza di taglio determinato dai valori R_1, C_1 . L'amplificatore A_0 può essere ^{anche} un emitter follower o un invertitore di tensione con guadagno. La funzione di trasferimento del filtro passa-banda si ottiene moltiplicando le funzioni di trasferimento delle 2 celle RC per il guadagno A_0 dello stadio di disaccoppiamento, che può essere ^{anche} maggiore dell'unità.

$$F(s) = \frac{\tau_1 s}{1 + \tau_1 s} \cdot A_0 \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 s} = \frac{A_0 \tau_1 s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2.$$

Si ottiene così un sistema di II ordine, con i poli $s_1 = -\frac{1}{\tau_1}$, $s_2 = -\frac{1}{\tau_2}$ e lo zero $s = 0$.

Troviamo edo il diagrammi di Bode del modulo e dell'argomento di $F(j\omega)$, con i valori $R_1 = 100k\Omega$, $C_1 = 1nF$, $R_2 = 10k\Omega$, $C_2 = 2,2nF$, $A_0 = 10$.

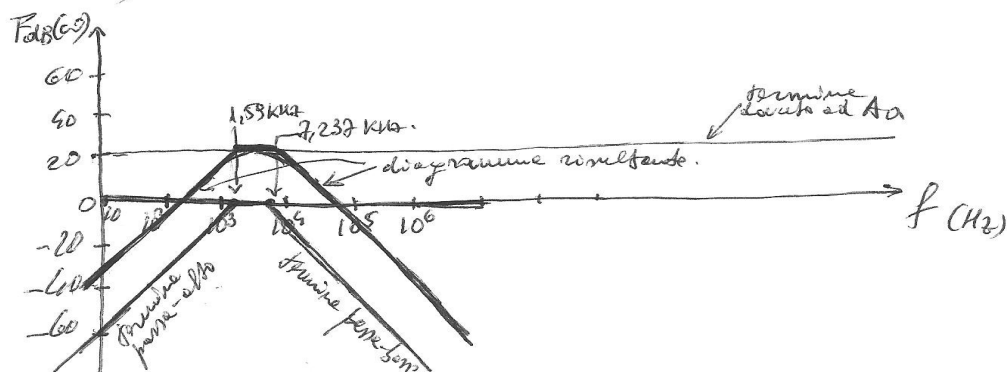
A_0 in questo caso può essere costituito da una configurazione operazionale non invertente con guadagno 10. Calcoliamo i valori dei poli e delle relative frequenze di taglio e -3dB:

$$f_i = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = \frac{1}{6,28 \cdot 10^5 \cdot 10^{-9}} = 1,59 \cdot 10^3 Hz = 1,59 kHz$$

(frequenza di taglio del primo polo -3dB)

$$f_s = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = \frac{1}{6,28 \cdot 10^4 \cdot 2,2 \cdot 10^{-9}} = 7,237 \cdot 10^3 Hz = 7,237 kHz$$

(frequenza di taglio a -3dB del secondo polo -3dB)



$$F(j\omega) = \frac{j\omega \tau_1 A_0}{(1+j\omega \tau_1)(1+j\omega \tau_2)} = \frac{j 2\pi f \tau_1 A_0}{(1+j 2\pi f \tau_1)(1+j 2\pi f \tau_2)}$$

Applicando le proprietà dei logaritmi al modello $F_{dB}(\omega)$ espresso in dB, si ha:

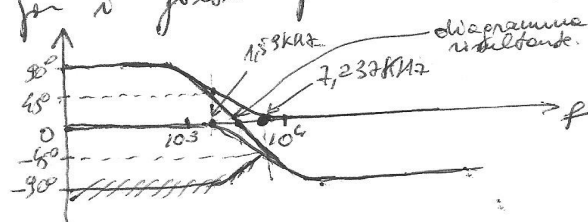
$$F_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |F(j\omega)| = \underbrace{20 \log_{10} A_0}_{\text{guadagno costante}} + \underbrace{20 \log_{10} \left| \frac{j\omega\tau_1}{1+j\omega\tau_1} \right|}_{\text{guadagno dovuto al filtro passa-alto}} + \underbrace{20 \log_{10} \left| \frac{1}{1+j\omega\tau_2} \right|}_{\text{guadagno dovuto al filtro passa-basso}}$$

Bisogna pertanto sommare il contributo dovuto ad A_0 ai contributi, già noti, dovuti ai due filtri di I ordine.

Il contributo dovuto ad A_0 è rappresentato da una retta orizzontale (parallela all'asse delle frequenze), con punti di ordinata pari a 20 dB ($20 \log_{10} 10$), più altri 2 termini (con pendenze di ± 20 dB/decade), subiscono una traslazione verso l'alto di 20 dB, dando luogo al diagramma risultante di tipo passa-banda.

Il diagramma della fase si ottiene sommando le fasi dei vari termini: $\varphi(\omega) = 0 - \arctan \omega\tau_1 + \arctan \omega\tau_2$

Bisogna pertanto sommare i diagrammi di Bode per i filtri passa-alto e passa-basso.

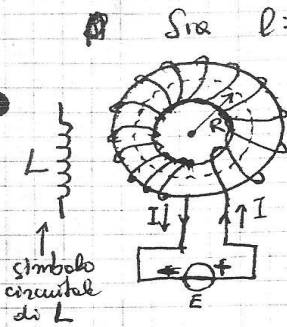


Induttori

Dalla Fisica sappiamo che un circuito elettrico percorso da corrente, continua o variabile nel tempo con qualsiasi legge, genera nello spazio circostante un campo magnetico, costante o variabile nel tempo con la stessa legge ~~da~~ con cui varia la corrente; pertanto, ad un qualsiasi circuito elettrico immerso in un mezzo di permeabilità magnetica $\mu = \mu_0 \mu_r$ (μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto $= 4\pi \cdot 10^{-7}$ Henry/metro e μ_r è la permeabilità ~~relativa~~ ^{magnetica} ~~relativa~~) è associato un campo d'induzione magnetica $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, dove $\vec{H}$ è il campo magnetico o eccitazione magnetica. Le linee di forza del campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ si concatenano con il circuito elettrico considerato, pertanto il numero totale delle linee di forza di $\vec{B}$ concatenate con il circuito è espresso, in base alla convenzione di Faraday, dal flusso di induzione magnetica $\Phi(\vec{B})$, che è proporzionale alla corrente I che fluisce nel circuito secondo la relazione $\Phi(\vec{B}) = L I$, dove L è una costante di proporzionalità che prende il nome di induttanza o coefficiente di autoinduzione del circuito. Ricordiamo che nel sistema Giorgi H si misura in amperspire/metro (Asp/m), B si misura in Weber/metro² (Wb/m²) ed L si misura in Henry (H).

Tutte le volte che si realizza un circuito elettrico, ai singoli conduttori del circuito è associata un'induttanza L che dipende dalla disposizione geometrica dei conduttori e dalle loro sezioni. Nei circuiti ad alta frequenza si cerca di rendere minimi gli effetti indesiderati dovuti dalle tre più piccole induttanze dei fili di collegamento, che in tal caso sono induttanze indesiderate o parassite, che perturbano il funzionamento ideale del circuito. In molti casi ^{invece}, in elettronica ed in elettrotecnica, si fa uso di induttori ^{avanti} ~~che~~ ^{di L} materiali voluti, che possono essere ottenuti realizzando opportuni avvolgimenti costituiti da numerose spire di filo di rame ^{isolato} ~~avvolte~~ ^{o realizzate in nuclei} ~~avvolte~~ ^{ferromagnetici} di vario tipo; nel caso delle alte frequenze, costituite da semplici avvolgimenti "in aria", cioè realizzati su supporti isolanti privi di nuclei ferromagnetici, essendo molto piccoli i valori di induttanza richiesti per realizzare circuiti oscillanti a radiofrequenza.

Consideriamo adesso il calcolo del coefficiente di autoinduzione L di un circuito particolare, il solenoide toroidale. In Fig. 23 è rappresentato un solenoide toroidale costituito da N spire di sezione S avvolte su un anello (toro) di materiale ferromagnetico, di cui si suppone, per semplicità ^{contando} ~~avvolte~~ ^e ~~avvolte~~ ^{primo} la permeabilità magnetica $\mu = \mu_0 \mu_r$, che, in realtà, nei materiali ferromagnetici dipende dal valore di H e quindi dalla corrente che percorre l'avvolgimento.



Sia $l = 2\pi R$ la lunghezza media del circuito magnetico riferita al raggio medio R del toro. Il calcolo di L si impone secondo quanto segue:

Il circuito è alimentato dal generatore di tensione continua E , che determina, in base alla resistenza ohmica R dell'avvolgimento, la corrente continua I ($I = \frac{E}{R}$).

Applichiamo la legge della concatenazione o circuitazione magnetica di Ampère, che serve al calcolo del campo magnetico H generato dal solenoide.

Fig. 23

Il campo magnetico è dovuto alle forze magnetomotrici NI , che si misura in amperspina (Asp), ed è dato dal prodotto del numero delle spire N per l'intensità di corrente I . Pertanto la circuitazione magnetica del campo H lungo il circuito magnetico (di lunghezza l), definita dal prodotto $Hl = H \cdot 2\pi R$, è uguale ad NI .

$$H \cdot 2\pi R = NI \quad (\text{legge di Ampère})$$

$$H = \frac{NI}{2\pi R}, \quad B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{2\pi R}$$

Se $\Phi(B)$ è il flusso d'induzione concatenato con una spira ($\Phi(B) = B \cdot S$) il flusso totale concatenato con il solenoide è dato da $\Phi_T(B) = N \cdot S \cdot B =$

$$= NS \cdot \mu_0 \mu_r \frac{NI}{2\pi R} = \left(\mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{2\pi R} \right) I = LI; \text{ pertanto il coefficiente di autoinduzione } L \text{ è dato dall'espressione } \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{2\pi R}.$$

In modo equivalente L si può calcolare partendo dalle legge di Hopkinson che stabilisce in un circuito magnetico la proporzionalità tra il flusso $\Phi(B)$ e le forze magnetomotrici NI . La costante di proporzionalità tra NI e $\Phi(B)$ prende il nome, analogamente a quanto si verifica nei circuiti elettrici, di resistenza magnetica o riluttanza. Per il solenoide in esame si ha:

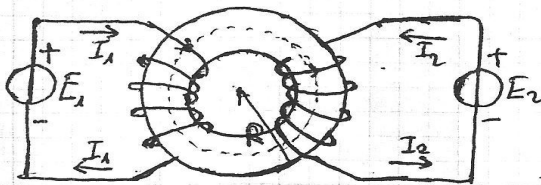
$$NI = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{riluttanza} \\ \text{(si misura in Henry reciproci H}^{-1})}}{R} \Phi(B), \text{ dove } R = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{S}$$

$$\Phi(B) = \frac{NI}{R}, \quad \Phi_T(B) = N \Phi(B) = \frac{N^2 I}{R} = LI$$

flusso concatenato con una spira flusso totale

$$L = \frac{N^2}{R} = \frac{N^2}{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{2\pi R}{S}} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{2\pi R}$$

Induzione Circuitale



$$l = 2\pi R$$

Fig. 24 $\Phi_{1T}(B)$ concatenato con il primo circuito e dovuto non soltanto alla corrente I_1 , ma anche alla corrente I_2 che percorre il secondo circuito, pertanto si ha:

$\Phi_{1T}(B) = L_1 I_1 + M_{12} I_2$, dove L_1 è il coefficiente di autoinduzione del circuito di N_1 spire ($L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 S}{2\pi R}$), ed M_{12} è il coefficiente di mutua induzione, anche esso espresso in Henry, tra circuito 2 e circuito 1.

Analogamente, il flusso d'induzione $\Phi_{2T}(B)$ concatenato con il secondo circuito è dovuto sia alla corrente I_2 , sia alla corrente I_1 che percorre il primo circuito; pertanto si ha:

$\Phi_{2T}(B) = L_2 I_2 + M_{21} I_1$, dove L_2 è il coefficiente di autoinduzione del circuito di N_2 spire ($L_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 S}{2\pi R}$), ed M_{21} è il coefficiente di mutua induzione tra circuito 1 e circuito 2.

Per il calcolo di M_{12} supponiamo di annullare la corrente I_1 . In tal caso si ha:

$\Phi_{1T}(B) = N_1 \Phi_2(B)$, dove $\Phi_2(B)$ è il flusso d'induzione concatenato con una spira dell'avvolgimento 1 ~~per effetto della corrente I_2~~ ;

$$\Phi_2(B) = \frac{\mu_0 \mu_r N_2 I_2 S}{2\pi R}$$

$$\Phi_{1T}(B) = \left(\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{2\pi R} \right) I_2, \quad M_{12} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{2\pi R}$$

Analogamente, per il calcolo di M_{21} , supponiamo di annullare la corrente I_2 . In tal caso si ha:

$\Phi_{2T}(B) = N_2 \Phi_1(B)$, dove $\Phi_1(B)$ è il flusso d'induzione concatenato con una spira dell'avvolgimento 2 per effetto della corrente I_1 ;

$$\Phi_1(B) = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1 S}{2\pi R}$$

Autunno 2000

$$\Phi_{2T}(B) = \left(\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{2\pi R} \right) I_1, \quad M_{21} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{2\pi R} = M_{12} = M$$

Essendo $M_{12} = M_{21}$, si indica con M il coefficiente di autoinduzione fra i circuiti 1 e 2.

$$|M| = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{2\pi R} = \frac{N_1 N_2}{R}$$

reluttanza

$|M|$ è il valore assoluto di M , che può essere positivo o negativo.

In Fig. 25 è riportato il simbolo circuitale di due circuiti mutuamente accoppiati

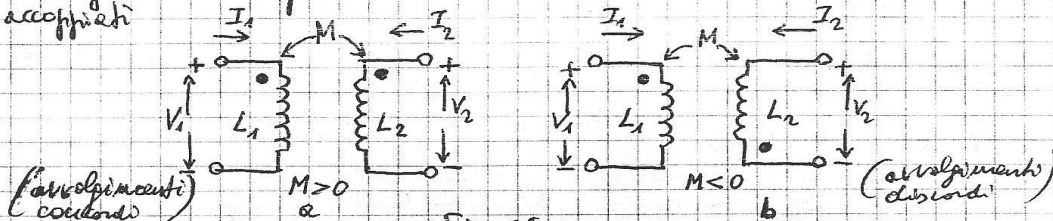


Fig. 25

I punti ~~in~~ ^{terminali} ~~reperati~~ ^{ripresi} in corrispondenza dei terminali degli avvolgimenti, indicano ~~che~~ ^{il} bisogna collegare il polo positivo ~~del~~ ^{di ciascun} generatore di tensione (V_1 o V_2), se si vuole che i campi magnetici generati dai due avvolgimenti siano concordi (M ~~positivo~~ ^{si assume per convenzione positivo} se i campi magnetici sono concordi). In (a) M è positivo, in (b) M è negativo.

Si definisce inoltre un coefficiente di accoppiamento tra i due avvolgimenti mediante la relazione: $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$; k è sempre minore dell'unità, in quanto non tutto il $\sqrt{L_1 L_2}$ flusso generato da uno dei due avvolgimenti si concatena con l'altro (k tiene conto del cosiddetto flusso disperso).

Legge di composizione di più induttori in serie o in parallelo

Due o più induttori in serie equivalgono, se si può trascurare l'induzione mutua, ~~transmutua~~ ad un unico induttore di induttanza equivalente $L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$. (Fig. 26).

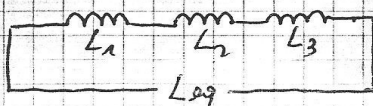


Fig. 26

Due o più induttori in parallelo equivalgono, trascurando l'induzione mutua, ad un unico induttore di induttanza equivalente L_{eq} tale che $\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$. (Fig. 27).

Autore: Guido Vici

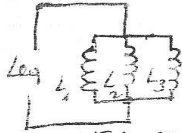


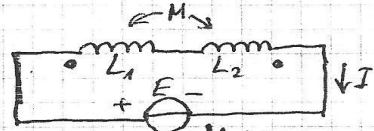
Fig. 27

Se, in particolare, si considerano due induttori L_1 e L_2 in serie, con coefficiente di autoinduzione $|M|$ (Fig. 28 a e b), l'induttanza equivalente è data dalla relazione $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm |M|$, a seconda che M sia positivo o negativo.

(a) $M > 0$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2|M|$$

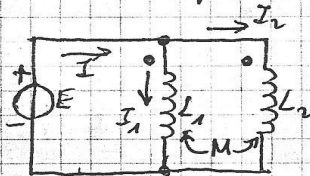
Fig. 28



(b)

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2|M|$$

Se si considerano invece due induttori L_1 e L_2 in parallelo, con coefficiente di autoinduzione $|M|$ (Fig. 29 a e b), l'induttanza equivalente è data dalla relazione $L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - |M|^2}{L_1 + L_2 \pm 2|M|}$, a seconda che M sia positivo o negativo.

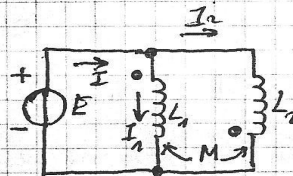


(a)

 $M > 0$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - |M|^2}{L_1 + L_2 - 2|M|}$$

Fig. 29



(b)

 $M < 0$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - |M|^2}{L_1 + L_2 + 2|M|}$$

Quando un induttore viene collegato ai capi di un generatore di tensione continua E , la corrente I nel circuito non si porta immediatamente al valore E/R , a regime determinato dalla resistenza R del circuito, ma tende ad esso gradualmente secondo la legge rappresentata in Fig. 30.

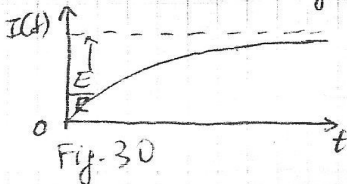


Fig. 30

Il fenomeno dipende dal fatto che quando varia la corrente che percorre un circuito di induttanza L , per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, avendo variabile il flusso $\Phi(B)$ concatenato col circuito, si genera nel

Autunno 2000

circuito una f.e.m. autoindotta $\bar{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$, proporzionale alla variazione di corrente ΔI relativa all'intervallo di tempo Δt . Il segno meno tiene conto della legge di Lenz, che stabilisce che la f.e.m. indotta si oppone alla causa che l'ha generata (in questo caso la f.e.m. E del generatore). Al limite, considerando variazioni infinitesime, $E_{ind} = -L \frac{di}{dt}$, dove $\frac{di}{dt}$ è il simbolo della derivata, definita dal rapporto degli infinitesimi di e dt . E_{ind} è il valor medio della forza elettromotrice autoindotta relativo all'intervallo Δt , E_{ind} è invece la f.e.m. autoindotta istantanea. Se consideriamo (Fig. 31) il circuito di un induttore ideale, cioè un induttore con avvolgimento di resistenza ohmica trascurabile, realizzato in aria o su un nucleo di permeabilità magnetica costante al variare della corrente), deduciamo che la f.e.m. E del generatore di tensione continua deve fare equilibrio alla f.e.m. autoindotta cambiata di segno, cioè alla cosiddetta caduta induttiva $L \frac{di}{dt}$; pertanto si ha:

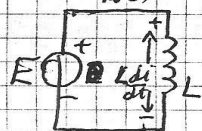


Fig. 31

$E = L \frac{di}{dt}$. In generale, considerando un generatore di f.e.m. $E(t)$, si ha che $E(t)$ è proporzionale a $\frac{di}{dt}$.

$E(t) = L \frac{di}{dt}$; pertanto l'induttore ideale è un componente lineare, la cui caratteristica è illustrata in Fig. 32.

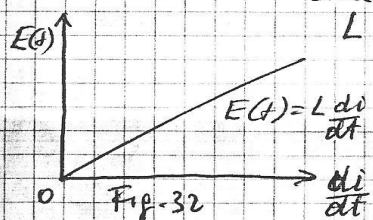


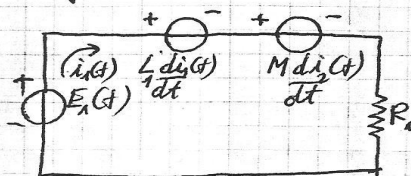
Fig. 32

L in sostanza deve essere costante al variare della corrente, affinché il componente si possa considerare lineare, il che avviene praticamente soltanto negli induttori senza nucleo ferromagnetico (in aria).

Se formiamo a considerare i due circuiti accoppiati induttivamente disegnati in Fig. 24, e supponiamo di sostituire ai generatori E_1 e E_2 di tensione continua, due generatori $E_1(t)$ e $E_2(t)$ di tensione variabile nel tempo con qualsiasi legge, possiamo subito trovare le equazioni che determinano il comportamento dei due circuiti. Scriviamo anzitutto la legge di Ohm generalizzata tenendo conto, accanto alle forze elettromotrici $E_1(t)$ e $E_2(t)$, anche delle tensioni (f.e.m.) autoindotte $L_1 \frac{di_1}{dt}$ e delle tensioni $M \frac{di_2}{dt}$,

17
dovuto alla mutua induzione, infatti, se varia la corrente in uno dei due circuiti, nell'altro, a causa del flusso concatenato, dovuto alla mutua induzione M , si genera una f.e.m. indotta di valore istantaneo $E_{m.ind} = -M \frac{di}{dt}$.

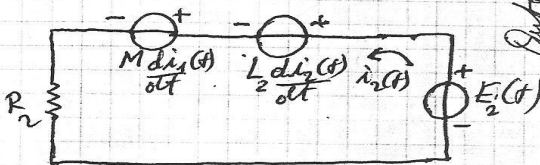
In particolare, si possono scrivere le seguenti equazioni, facendo riferimento alla Fig. 33, che rappresenta i circuiti equivalenti che tengano conto dei suddetti effetti di auto e mutua induzione.



ciruito 1

R_1 è la resistenza ohmica delle N_1 spire

Fig. 33



ciruito 2

R_2 è la resistenza ohmica delle N_2 spire

Sistema di equazioni differenziali da risolvere i due circuiti

$$\begin{cases} E_1(t) - L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} = R_1 i_1(t) \\ E_2(t) - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt} = R_2 i_2(t) \end{cases}$$

$$M = \pm |M|$$

Un induttore di induttanza L non dissipa energia, ma la immagazzina sotto forma di energia elettromagnetica associata al campo magnetico H generato dalle correnti che lo percorrono. In generale, se $i(t)$ è la corrente istantanea, l'energia elettromagnetica $W(t)$ è data dalle formule $W(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) =$

$W(t)$ è denominata anche energia intrinseca delle correnti.

$$= \frac{1}{2} \Phi(B) I(t)$$

, essendo $\Phi(B) = L I(t)$