LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Antonino Chimalta

INTRODUZIONE

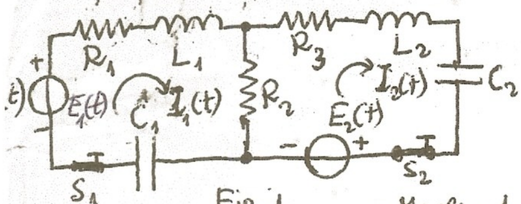


Fig. 1

Consideriamo la rete lineare di Fig. 1, e scriviamo le equazioni integrodifferenziali che si ottengono applicando alle due maglie le leggi di Kirchoff:

Maglia 1
$$E_1(t) - L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} - \frac{1}{C_1}\int_0^t I_1(t)\,dt = R_1 I_1(t) + R_2\left[I_1(t) - I_2(t)\right]$$

Maglia 2
$$-E_2(t) - L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} - \frac{1}{C_2}\int_0^t I_2(t)\,dt = R_2\left[I_2(t) - I_1(t)\right] + R_3 I_2(t)$$

Le due equazioni integrodifferenziali sono state scritte, una volta fissato arbitrariamente il verso di circolazione delle correnti di maglia $I_1(t)$ e $I_2(t)$ (orario), considerando nulle le condizioni iniziali $I_1(0)$ e $I_2(0)$ (correnti iniziali nelle induttanze L_1 e L_2) e $V_{C1}(0)$, $V_{C2}(0)$ (tensioni iniziali dei condensatori C_1 e C_2), al momento della chiusura delle due maglie mediante gli interruttori S_1 e S_2. Nei primi membri delle due equazioni figurano, accanto alle tensioni di eccitazione $E_1(t)$ e $E_2(t)$, le f.e.m autoindotte $-L_1\frac{dI_1(t)}{dt}$ e $-L_2\frac{dI_2(t)}{dt}$ (legge di Faraday-Neumann-Lenz) e le forze controelettromotrici $-\frac{1}{C_1}\int_0^t I_1(t)\,dt$ e $-\frac{1}{C_2}\int_0^t I_2(t)\,dt$ dovute alla presenza dei condensatori C_1 e C_2. Si presenta pertanto il problema di integrare il sistema integrodifferenziale, allo scopo di ricavare le funzioni di rete $I_1(t)$ e $I_2(t)$ (risposte) corrispondenti alle eccitazioni $E_1(t)$ e $E_2(t)$.
Il problema viene notevolmente semplificato dall'uso della trasformata di Laplace; infatti, con tale metodo, le due equazioni integrodifferenziali vengono trasformate in equazioni algebriche aventi come incognite le funzioni trasformate $I_1(s)$ e $I_2(s)$, corrispondenti alle eccitazioni trasformate $E_1(s)$ e $E_2(s)$. Una volta ottenute le funzioni $I_1(s)$ e $I_2(s)$, definite nel dominio della variabile complessa s della trasformata di Laplace, si passa, mediante il procedimento inverso (antitrasformazione), alle funzioni $I_1(t)$ e $I_2(t)$, che definiscono il comportamento della rete nel dominio del tempo.

Sia data una funzione continua $f(t)$, definita per $t>0$, la funzione $f(t)$ è trasformabile secondo Laplace ($\mathcal{L}$-trasformabile), se esiste un numero complesso $s_0=\sigma_0+j\omega_0$ tale che esista finito l'integrale $F_*(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-s_0 t}dt$.
Se l'integrale $F_*(s)$ è finito, l'integrale $F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt=\mathcal{L}[f(t)]$ converge ad un valore finito per tutti i numeri complessi $s=\sigma+j\omega$ tali che σ sia maggiore di σ_0 (σ_0 è l'ascissa di convergenza di $F(s)$).
L'integrale $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, definito per ogni $\sigma>\sigma_0$, prende il nome di trasformata di Laplace della funzione $f(t)$.

PROPRIETA' FONDAMENTALI

Consideriamo adesso alcune proprietà fondamentali della trasformata di Laplace:

1) $$\mathcal{L}[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)+\dots a_n f_n(t)] = a_1\mathcal{L}[f_1(t)]+a_2\mathcal{L}[f_2(t)]+\dots$$
$$\dots+a_n\mathcal{L}[f_n(t)]=$$
$$= a_1F_1(s)+a_2F_2(s)+\dots+a_nF_n(s),$$

dove $a_1, a_2, \dots a_n$ sono delle costanti.

La trasformazione di Laplace è pertanto un'operazione lineare.

2) Se $f(t)=0$ per $t<0$ ed è $\mathcal{L}$-trasformabile, si ha:
$$\mathcal{L}[f(t-t_0)]=e^{-st_0}\mathcal{L}[f(t)]=e^{-st_0}F(s).$$

Infatti, se $t_0>0$, da $\mathcal{L}[f(t-t_0)]$, posto $t-t_0=\tau$, si ottiene:
$$\mathcal{L}[f(\tau)]=\int_{-t_0}^{\infty} f(\tau)\,e^{-s(t_0+\tau)}d\tau=e^{-st_0}\int_{-t_0}^{\infty} f(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau=$$
(per $t=0$ $\tau=-t_0$)
$$=e^{-st_0}\int_{-t_0}^{0} f(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau+e^{-st_0}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau;$$

il primo integrale si annulla, essendo $f(t)=0$ per $t<0$, pertanto
$$\mathcal{L}[f(t-t_0)]=\mathcal{L}[f(\tau)]=e^{-st_0}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau=e^{-st_0}F(s).$$

3)
Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $F(s-s_0) = \mathcal{L}[e^{s_0 t} f(t)]$.

Infatti si ha: $F(s-s_0) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(s-s_0)t}\, dt = \int_0^\infty (f(t)\, e^{s_0 t}) e^{-st}\, dt = \mathcal{L}[e^{s_0 t} f(t)]$.

4) $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = \tau F(\tau s)$.

Infatti si ha: $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(u)\, e^{-s(u\tau)}\, d(u\tau) =$
(ponendo $u = \frac{t}{\tau}$)

$$= \tau \int_0^\infty f(u)\, e^{-s\tau u}\, du = \tau F(\tau s).$$

5) $\mathcal{L}\left[\frac{d f(t)}{dt}\right] = s F(s) - f(0^+)$, dove $f(0^+)$ è il limite di $f(t)$ per $t \to 0$ da valori positivi di t.

Infatti si ha: (integrando per parti):

$$\mathcal{L}\left[\frac{d f(t)}{dt}\right] = \lim_{\substack{t_1 \to 0^+ \\ t_2 \to \infty}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = \lim_{\substack{t_1 \to 0^+ \\ t_2 \to \infty}} \left[f(t_2)\, e^{-st_2} - f(t_1) e^{-st_1} + \right.$$

$$\left. + s \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, e^{-st}\, dt \right] = \lim_{t_2 \to \infty} f(t_2) e^{-st_2} - \lim_{t_1 \to 0^+} f(t_1)\, e^{-st_1} + s \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= 0 - f(0^+) + s F(s) = s F(s) - f(0^+).$$

6) $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(n-k)}(0^+)\, s^{k-1}$

$f^{(n-k)}(0^+) \begin{cases} \text{se } (n-k) = 0, \ \lim_{t \to 0^+} f(t) \\ \text{negli altri casi, } \lim_{t \to 0^+} \frac{d^{(n-k)} f}{d t^{(n-k)}} \end{cases}$

Se in particolare $n = 2$ si ha:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - \left[\frac{d f(t)}{dt}\right]_{t \to 0^+} - s f(0^+).$$

Infatti si ha: $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\right] = s \mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) - \left(\frac{df}{dt}\right)_{t \to 0^+} = s^2 F(s) - s f(0^+) - \left(\frac{df}{dt}\right)_{t \to 0^+}$.
(applicando la proprietà 5) alla $\frac{df}{dt}$)

Se in particolare $f(0^+) = 0$ e $\left(\frac{df}{dt}\right)_{t \to 0^+} = 0$,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s).$$

3 bis

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(n-k)}(0^+)\, s^{k-1}$$

$n=1$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f^{(1-1)}(0^+)\, s^{1-1} =$$

$$= sF(s) - f^{(0)}(0^+) = sF(s) - f(0^+)$$

$n=2$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - f^{(2-1)}(0^+)\, s^{1-1} - f^{(2-2)}(0^+)\, s^{2-1} =$$

$$= s^2F(s) - f'(0^+) - f^{(0)}(0^+)\, s =$$

$$= s^2F(s) - f'(0^+) - f(0^+)\, s$$

$n=3$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right] = s^3F(s) - f^{(3-1)}(0^+)\, s^{1-1} - f^{(3-2)}(0^+)\, s^{2-1}$$

$$- f^{(3-3)}(0^+)\, s^{3-1} = s^3F(s) - f^{(2)}(0^+)$$

$$- f^{(1)}(0^+)\, s - f^{(0)}(0^+)\, s^2 =$$

$$= s^3F(s) - f''(0^+) - f'(0^+)\, s - f(0^+)\, s^2$$

7) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$.

Infatti, ponendo $\phi(t) = \int_0^t f(t)\,dt$, si ha: $\phi(0) = 0$, $\frac{d\phi(t)}{dt} = f(t)$; pertanto, applicando alla $\phi(t)$ la proprietà 5), si ottiene:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\phi(t)}{dt}\right] = s\,\mathcal{L}[\phi(t)] - \phi(0^+) = s\,\mathcal{L}[\phi(t)];$$

$$\mathcal{L}[\phi(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{d\phi(t)}{dt}\right]$$, ma $\frac{d\phi(t)}{dt} = f(t)$, quindi si ha:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s).$$

Analogamente, se si considera l'integrale ennesimo di $f(t)$, si ottiene:

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t\int_0^t \cdots \int^t}_{n\ \text{volte}} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s^n}F(s).$$

Infatti, nel caso particolare dell'integrale doppio di $f(t)$, si ha:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t\int_0^t f(t)\,dt\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \phi(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\phi(t)] = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}F(s) = \frac{F(s)}{s^2},$$

(posto $\int_0^t f(t)\,dt = \phi(t)$) essendo $\mathcal{L}[\phi(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$.

8) $\lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{s\to\infty} s\,F(s) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$ - Teorema del valore iniziale -

Infatti si ha:

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}\,dt = \lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0^+)\right];$$

ma il limite dell'integrale al primo membro è nullo per $s\to\infty$, essendo $e^{-st}\to 0$,

pertanto $$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0^+)\right] = 0,$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

9) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$. - Teorema del valore finale -

Si ha ~~infatti~~: $\lim_{s\to 0}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to 0}\left[sF(s) - f(0^+)\right]$,

ma $\lim_{s\to 0}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\,dt = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{df(t)}{dt}\,dt =$

$$= \lim_{t\to\infty} [f(t) - f(0^+)] \quad ; \text{ pertanto si ha: } \lim_{t\to\infty} f(t) - \cancel{f(0^+)} = \lim_{s\to 0} sF(s) - \cancel{f(0^+)},$$

e infine: $$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

TRASFORMATE DI LAPLACE DI ALCUNE FUNZIONI FONDAMENTALI

$V_G(t)$ - Funzione gradino di ampiezza V -

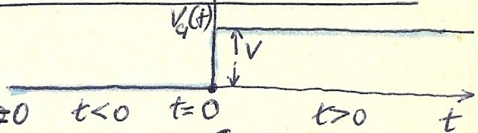


Fig. 2

Definizione di $V_G(t)$ $\begin{cases} \text{per } t<0, V_G(t)=0 \\ \text{per } t>0, V_G(t)=V \end{cases}$

$$\mathcal{L}[V_G(t)] = \int_0^\infty V e^{-st} dt = \left. -\frac{V}{s} e^{-st} \right|_0^\infty = -\frac{V}{s} e^{-\infty} - \left(-\frac{V}{s} e^0\right) = \frac{V}{s}$$

$\delta(t)$ - Funzione delta o funzione di Dirac o funzione impulsiva unitaria -
È una funzione nulla per qualsiasi valore di t, infinita per t=0, ed è definita in modo che l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt$ sia uguale a 1.
In pratica la funzione $\delta(t)$ serve per rappresentare un impulso molto stretto e di ampiezza elevatissima in corrispondenza di t=0.
Vale per la funzione δ la seguente proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$$, dove f(t) è una funzione continua.

Pertanto si ottiene immediatamente la $\mathcal{L}$-trasformata di $\delta(t)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-st} dt = \left[e^{-st}\right]_{t=0} = 1$$

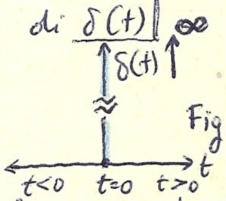


Fig. 3

$V_R(t)$ - Funzione impulsiva rettangolare o impulso rettangolare di durata T e di ampiezza V -

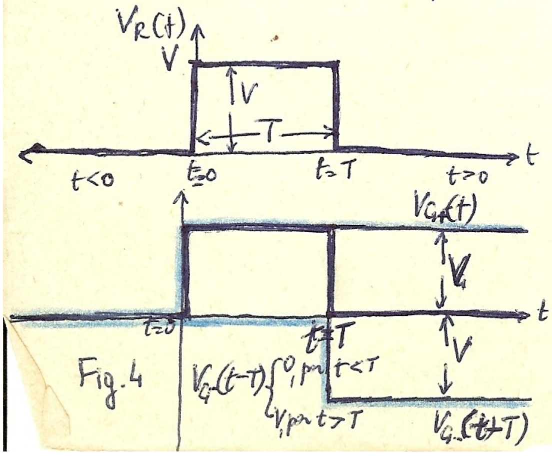


Fig. 4

L'impulso rettangolare si può considerare come il risultato della sovrapposizione di due ~~impulsi~~ gradini di ampiezza V, applicati all'istante t=0 e all'istante t=T e di segno opposto.

$$V_R(t) = V_{G+}(t) + V_{G-}(t-T)$$

$$\mathcal{L}[V_{G-}(t-T)] = e^{-Ts}\,\mathcal{L}[V_G(t)] = e^{-Ts}\frac{V}{s} = \frac{V}{s}e^{-Ts}$$

$$\mathcal{L}[V_R(t)] = \mathcal{L}[V_{G+}(t)] + \mathcal{L}[V_{G-}(t-T)] = \frac{V}{s}(1 - e^{-Ts})$$ (vedi proprietà 2) ;

pertanto si ha: $\mathcal{L}[V_R(t)] = \frac{V}{s}\left(1-e^{-Ts}\right)$.

$f(t) = e^{-kt}$

<u>Funzione esponenziale</u> $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-kt}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(k+s)t}dt = \left|-\frac{1}{s+k}e^{-(k+s)t}\right|_0^\infty =$

con $k>0$

$$= \left[-\frac{1}{s+k}e^{-\infty} - \left(-\frac{1}{s+k}e^{0}\right)\right] = \frac{1}{s+k}$$

Se $f(t) = e^{kt} \rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s-k}$

$f(t) = t$ <u>Rampa</u>

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty te^{-st}dt = \left|-\frac{t}{s}e^{-st}\right|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \Big[\underbrace{\lim_{t\to\infty} -\frac{t}{s}e^{-st} + \lim_{t\to 0}\frac{t}{s}e^{-st}}_{0}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{s}\left|-\frac{1}{s}e^{-st}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-\infty} + \frac{1}{s}e^{0}\right] = \frac{1}{s^2}$$

$f(t) = t^2$

<u>Parabola</u>

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty t^2e^{-st}dt = \left|-\frac{t^2}{s}e^{-st}\right|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}t\,dt =$$

$$= \Big[\underbrace{\lim_{t\to\infty} -\frac{t^2}{s}e^{-st} + \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{s}e^{-st}}_{0}\Big] + \frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s^2} \quad , \text{ essendo } \int_0^\infty e^{-st}t\,dt = \frac{1}{s^2}$$

Pertanto si ha: $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s^3}$.

Se $f(t) = t^n$ $\quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Se $f(t) = e^{-(\alpha+j\beta)t}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-(\alpha+j\beta)t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+j\beta+s)}dt = \left|-\frac{1}{s+\alpha+j\beta}e^{-(\alpha+j\beta+s)t}\right|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{s+\alpha+j\beta}$$

Se $f(t) = e^{(\alpha+j\beta)t}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{(\alpha+j\beta)t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(\alpha+j\beta-s)t}dt = \left|\frac{1}{\alpha+j\beta-s}e^{(\alpha+j\beta-s)t}\right|_0^\infty =$$

$$= -\frac{1}{\alpha+j\beta-s} = \frac{1}{s-\alpha-j\beta}$$

Se $f(t) = \cos\omega t$ 7

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+\cancel{j\omega}+s-\cancel{j\omega}}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2};$$

Infatti per la 2ª formula di Eulero si ha: $\cos\omega t = \dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$

pertanto $\mathcal{L}[\cos\omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$.

Se $f(t) = \sin\omega t$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]}{2j} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{\cancel{s}+j\omega-\cancel{s}+j\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2};$$

Infatti per la 1ª formula di Eulero si ha: $\sin\omega t = \dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$

pertanto $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

Se $f(t) = \dfrac{1-e^{-kt}}{k}$,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{k}\right] - \frac{1}{k}\mathcal{L}[e^{-kt}] = \frac{1}{ks} - \frac{1}{k}\frac{1}{(s+k)} = \frac{\cancel{s}+k-\cancel{s}}{ks(s+k)} = \frac{1}{s(s+k)};$$

pertanto $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s(s+k)}$.

Se $f(t) = t\,e^{-kt}$,

applicando ~~la~~ proprietà 3) si ha:

$$\mathcal{L}[t\,e^{-kt}] = \mathcal{L}[t] = \frac{1}{[s-(-k)]^2} = \frac{1}{(s+k)^2}, \text{ essendo } \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2};$$

con $s-(-k)$ al posto di s

$s-(-k) \longrightarrow s$

Infatti si ha:
$$\mathcal{L}[f(t)\,e^{s_0 t}] = F(s-s_0) = \mathcal{L}[f(t)]$$
con $f(t) = t$ e $s_0 = -k$ — con $s-s_0$ al posto di s

pertanto $\mathcal{L}[t\,e^{-kt}] = \dfrac{1}{(s+k)^2}$

Se $f(t) = \dfrac{kt-1+e^{-kt}}{k^2}$; $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\dfrac{t}{k}\right] - \mathcal{L}\left[\dfrac{1}{k^2}\right] + \mathcal{L}\left[\dfrac{e^{-kt}}{k^2}\right] =$

$$= \frac{1}{ks^2} - \frac{1}{k^2 s} + \frac{1}{k^2}\frac{1}{(s+k)} = \frac{k(s+k) - s(s+k) + s^2}{k^2 s^2 (s+k)} = \frac{\cancel{ks}+k^2-\cancel{s^2}-\cancel{ks}+\cancel{s^2}}{k^2 s^2 (s+k)} = \frac{1}{s^2(s+k)};$$

pertanto $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s^2(s+k)}$.

IMPIEGO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE NELLA RISOLUZIONE DELLE RETI LINEARI E NELLO STUDIO DELLE RISPOSTE DI UNA RETE LINEARE ALLE VARIE ECCITAZIONI.

Torniamo a considerare la rete lineare di fig. 1. Per $\mathcal{L}$-trasformare le equazioni integrodifferenziali applichiamo le proprietà 5) e 7) della trasformata di Laplace, tenendo conto delle condizioni iniziali nulle, in particolare $I_1(0^+)=0$ e $I_2(0^+)=0$.

$$\begin{cases} \text{Maglia 1: } \mathcal{L}[E_1(t)] - L_1\mathcal{L}\left[\dfrac{dI_1(t)}{dt}\right] - \dfrac{1}{C_1}\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t I_1(t)\,dt\right] = R_1\mathcal{L}[I_1(t)] + \\ \qquad + R_2\left\{\mathcal{L}[I_1(t)] - \mathcal{L}[I_2(t)]\right\} \\ \text{Maglia 2: } -\mathcal{L}[E_2(t)] - L_2\mathcal{L}\left[\dfrac{dI_2(t)}{dt}\right] - \dfrac{1}{C_2}\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t I_2(t)\,dt\right] = R_2\left\{\mathcal{L}[I_2(t)] - \mathcal{L}[I_1(t)]\right\} + \\ \qquad + R_3\mathcal{L}[I_3(t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1(s) - L_1 s I_1(s) - \dfrac{1}{sC_1} I_1(s) = R_1 I_1(s) + R_2[I_1(s) - I_2(s)] \\ -E_2(s) - L_2 s I_2(s) - \dfrac{1}{sC_2} I_2(s) = R_2 I_2(s) - R_2 I_1(s) + R_3 I_2(s) \end{cases}$$

Le due equazioni sono state così trasformate in equazioni algebriche nelle incognite $I_1(s)$ e $I_2(s)$ ($\mathcal{L}$-trasformate delle correnti). Dalle funzioni $I_1(s)$ e $I_2(s)$ possiamo quindi ottenere, antitrasformando, le correnti $I_1(t)$ e $I_2(t)$ nel dominio del tempo.

In pratica, per passare dalla rete originaria alla rete $\mathcal{L}$-trasformata, basta sostituire ad ogni eccitazione $E(t)$ la relativa trasformata $E(s)$ e ad ogni componente passivo il corrispondente componente $\mathcal{L}$-trasformato nel dominio della variabile s, secondo il seguente schema:

$$R \rightarrow R \qquad L \rightarrow Ls \qquad C \rightarrow \frac{1}{sC}$$

La rete di fig. 1 viene quindi modificata come mostra la fig. 5;

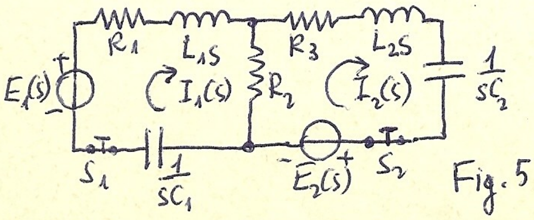


Fig. 5

Risposta di un filtro passa-basso alle varie eccitazioni, con condizioni iniziali [redacted] qualsiasi.

– Filtro passa-basso RC – (V_{c0} è la tensione iniziale [redacted] del condensatore carico)

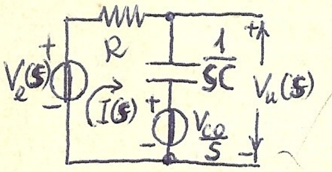


Fig. 6 ↑
Rete nel dominio di s

Scriviamo l'equazione del circuito:

$V_e(t)$ è il generatore che eccita il circuito;

$$V_e(t) - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt - V_{c0} = R I(t).$$

$\mathcal{L}$-trasformando ambo i membri otteniamo:

$$V_e(s) - \frac{1}{sC} I(s) - \frac{V_{c0}}{s} = R I(s).$$

Risolvendo l'equazione algebrica otteniamo la trasformata $I(s)$:

$$I(s) = \frac{V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}}{R + \frac{1}{sC}}.$$

$$V_e(s) - R I(s) = V_u(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_{c0}}{s} = \frac{V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{1}{sC} + \frac{V_{c0}}{s} = \frac{V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}}{\frac{RCs+1}{sC}} \cdot \frac{1}{sC} + \frac{V_{c0}}{s} =$$

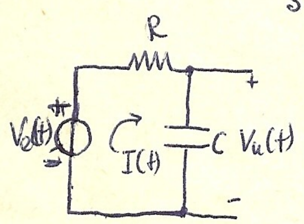


Fig. 7 ↑
Rete nel dominio del tempo

$$= \frac{V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}}{1 + \tau s} + \frac{V_{c0}}{s} = \frac{V_e(s)}{1+\tau s} - \frac{V_{c0}}{s(1+\tau s)} + \frac{V_{c0}}{s} =$$

[redacted] $\tau = RC$ (costante di tempo)

$$= \frac{V_e(s)}{1+\tau s} + \frac{V_{c0}(1+\tau s) - V_{c0}}{s(1+\tau s)} = \frac{V_e(s)}{1+\tau s} + \frac{\cancel{V_{c0}} + V_{c0}\tau s - \cancel{V_{c0}}}{s(1+\tau s)} =$$

$$= \frac{V_e(s)}{1+\tau s} + \frac{V_{c0}\tau \cancel{s}}{\cancel{s}(1+\tau s)} = \frac{V_e(s)}{1+\tau s} + \frac{V_{c0}\tau}{1+\tau s};$$

pertanto, nel dominio di s si ha: $V_u(s) = \frac{V_e(s)}{1+\tau s} + \frac{V_{c0}\tau}{1+\tau s}$.

Se, in particolare $V_{c0} = 0$, il rapporto tra la trasformata della risposta $V_u(s)$ e la trasformata dell'eccitazione $V_e(s)$ prende il nome di funzione di trasferimento del circuito, e si indica con $F(s)$: $F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{1+\tau s}$.

Tale funzione, per $s = -\frac{1}{\tau}$ diverge, ~~tende~~ cioè all'infinito; pertanto $s = -\frac{1}{\tau}$ è l'unico polo di $F(s)$, ed $F(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema di 1° ordine, caratterizzata quindi da un solo polo, corrispondente all'unico componente reattivo C presente nella rete.

La risposta del filtro ~~passa-~~basso all'onda quadra di fig. 8 (con componente continua di valore $\frac{V_e}{2}$) si ottiene nel seguente modo:

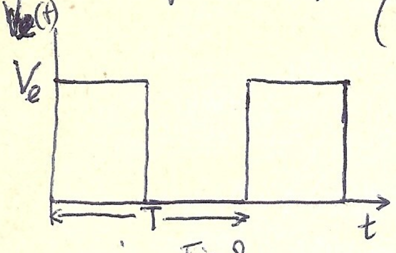


Fig. 8

L'onda quadra può essere considerata come una successione di gradini di durata $\frac{T}{2}$ e di ampiezza V_e; pertanto si ha:

$$\mathcal{L}\left[V_e(t)\right] = \frac{V_e}{s} = V_e(s), \quad V_u(s) = V_e(s)F(s),$$

$$V_u(s) = \frac{V_e}{s(1+\tau s)} + \frac{V_{c0}\tau}{1+\tau s} = \frac{V_e}{s} - \frac{V_e\tau}{1+\tau s} + \frac{V_{c0}\tau}{1+\tau s} =$$

$$= \frac{V_e}{s} - \frac{V_e}{\frac{1}{\tau}+s} + \frac{V_{c0}}{\frac{1}{\tau}+s}.$$

La risposta $V_u(t)$ nel dominio del tempo si ottiene antitrasformando $V_u(s)$, facendo corrispondere ad ogni termine la rispettiva $f(t)$:

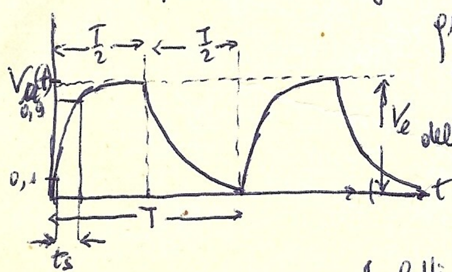
$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1} V_u(s) = \mathcal{L}^{-1}\frac{V_e}{s} - \mathcal{L}^{-1}\frac{V_e}{\frac{1}{\tau}+s} + \mathcal{L}^{-1}\frac{V_{c0}}{\frac{1}{\tau}+s} =$$

$$= V_e - V_e e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{c0} e^{-\frac{t}{\tau}} = V_e\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + V_{c0} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

abbiamo così ottenuto la risposta del filtro ad un gradino di ampiezza V_e.
Supponiamo adesso che V_{c0} sia uguale a zero, e consideriamo i seguenti casi:

$\frac{T}{2} \gg \tau = RC$ (costante di tempo).

In questo caso (Fig. 9.), l'uscita $V_u(t)$ è tanto più simile all'onda quadra applicata, quanto più piccola è τ rispetto a $\frac{T}{2}$; infatti il condensatore si carica in un tempo molto piccolo rispetto a $\frac{T}{2}$; il tempo di salita t_s dell'uscita è definito come il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale di carica.



Se invece $\frac{T}{2} \ll \tau$

$$V_u(t) = V_e\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \simeq V_e - V_e + V_e\frac{t}{\tau} = V_e\frac{t}{\tau}.$$

Infatti, per $t \ll \tau$, $e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$; per $t = \frac{T}{2}$ $V_u\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{V_e T}{2\tau}$.

L'uscita $V_u(t)$ è in pratica un'onda triangolare, ed il circuito si comporta come quasi-integratore, perché la costante τ sia molto maggiore di $\frac{T}{2}$. (Fig. 10).

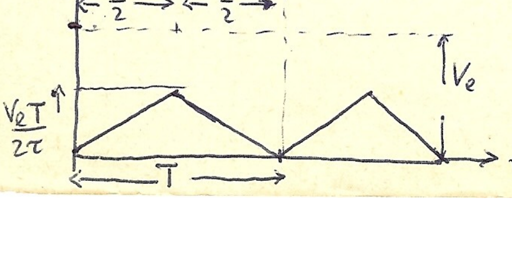


Fig. 10

La risposta del circuito passa-basso alla rampa $V_e(t) = At$ (Fig. 11) si ottiene considerando la trasformata $V_e(s) = \frac{A}{s^2}$, nel caso particolare in cui $V_{co} = 0$.

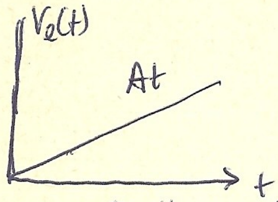


Fig. 11

$$V_u(s) = V_e(s)\,F(s) = \frac{A}{s^2}\,\frac{1}{1+\tau s} = \frac{A}{s^2}\,\frac{1}{\tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1}V_u(s) = \frac{A}{\tau}\,\frac{\frac{t}{\tau}-1+e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{\tau^2}} = A\tau\left(\frac{t}{\tau}-1+e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = A\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Infatti si ha: $\mathcal{L}\left(\frac{kt-1+e^{-kt}}{k^2}\right) = \frac{1}{s^2(s+k)}$,

dove $k = \frac{1}{\tau}$.

Se in particolare il circuito viene eccitato da un'onda triangolare di periodo T e di ampiezza V_e, con componente continua $\frac{V_e}{2}$, fig. 12, si distinguono due casi:

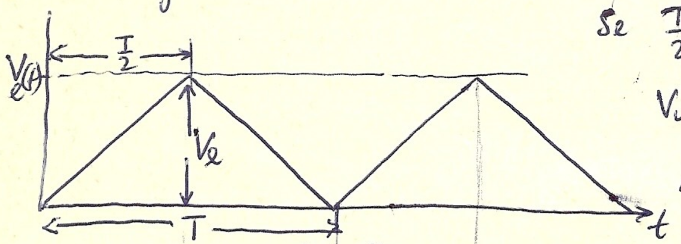


Fig. 12

Se $\frac{T}{2} \gg \tau$, con $A = \frac{V_e}{\frac{T}{2}} = \frac{2V_e}{T}$,

$$V_u(t) \simeq \frac{2V_e}{T}(t-\tau) \quad \text{(Fig. 13)}$$

, essendo $e^{-\frac{t}{\tau}}$ trascurabile per $t \gg \tau$;

$$V_u\left(\frac{T}{2}\right) \simeq \frac{2V_e}{T}\left(\frac{T}{2}-\tau\right) = V_e - \frac{2V_e\tau}{T},$$

e $V_u(t)$ è molto simile a $V_e(t)$.

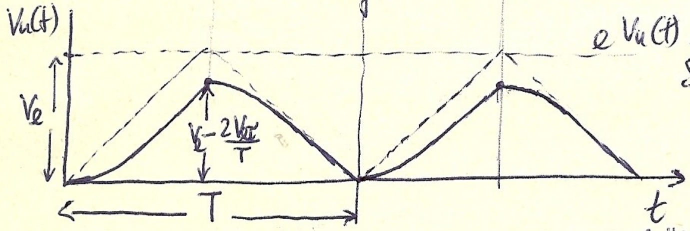


Fig. 13

Se invece $\frac{T}{2} \ll \tau$,

$$V_u(t) \simeq \frac{2V_e}{T}\left(\cancel{t}-\cancel{\tau}+\cancel{\tau}-\cancel{t}+\frac{t^2}{2\tau}\right) = \boxed{\frac{V_e}{T\tau}t^2};$$

infatti, per $t \ll \tau$ si ha: $e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2}$.

$V_u(t)$ ha andamento parabolico, in quanto il circuito si comporta come quasi-integratore, purché τ sia molto maggiore di $\frac{T}{2}$. (Fig. 14).

$V_u(t)$, per $t = \frac{T}{2}$, $= \frac{V_e}{T\tau}\cdot\frac{T^2}{4} = \frac{V_e}{4}\frac{T}{\tau}$.

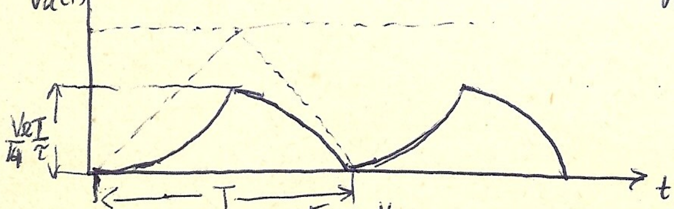


Fig. 14

Analogo comportamento presenta il filtro passa-basso LR (fig. 15)

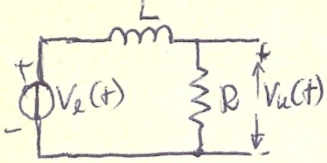


fig. 15

L-trasformando la rete si ottiene il circuito di fig. 16.

$$V_u(s) = \frac{V_e(s)R}{R+Ls} = \frac{V_e(s)}{1+\frac{L}{R}s} = \frac{V_e(s)}{1+\tau s},$$

dove τ (costante di tempo) $= \frac{L}{R}$;

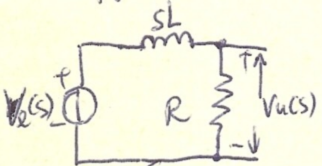


Fig. 16

la funzione di trasferimento è pertanto $F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{1+\tau s}$.

Risposta di un filtro passa-alto alle varie eccitazioni, con condizioni iniziali qualsiasi (Fig. 17).

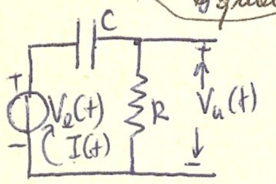


Fig. 17

Scriviamo l'equazione del circuito:

$$V_e(t) - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt - V_{co} = RI(t) \quad ;$$

(V_{co} è la tensione iniziale del condensatore carico)

L-trasformando si ottiene la rete di fig 18.

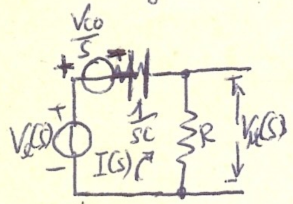


Fig. 18

$$V_e(s) - \frac{1}{sC}I(s) - \frac{V_{co}}{s} = R\,I(s);$$

$$I(s) = \frac{V_e(s) - \frac{V_{co}}{s}}{R+\frac{1}{sC}}, \quad V_u(s) = RI(s) = \frac{R\left[V_e(s) - \frac{V_{co}}{s}\right]}{R+\frac{1}{sC}} =$$

$$= \frac{R\,V_e(s)}{\frac{RCs+1}{sC}} - \frac{R\frac{V_{co}}{s}}{\frac{RCs+1}{sC}} = \frac{RCs\,V_e(s)}{RCs+1} - \frac{RC\,V_{co}}{RCs+1} =$$

$$V_u(s) = \frac{V_e(s)\tau s}{1+\tau s} - \frac{\tau V_{co}}{1+\tau s} \qquad \text{dove } \tau = RC \text{ (costante di tempo)}.$$

Se $V_{co} = 0$, $\quad V_u(s) = \frac{V_e(s)\,\tau s}{1+\tau s}$ e $F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{\tau s}{1+\tau s}$

$F(s)$ (funzione di trasferimento) ha uno zero $s=0$ e un polo $s = -\frac{1}{\tau}$; infatti per $s=0$, $F(s)=0$, mentre per $s = -\frac{1}{\tau}$ $F(s)$ diverge.

La risposta del filtro passa alto ad un gradino di ampiezza V_e si ottiene nel solito modo, moltiplicando $F(s)$ per la trasformata dell'eccitazione ed antitrasformando $V_u(s)$ (supponendo nulla V_{co}).

$V_u(s) = V_e(s)\,F(s) = \frac{V_e}{s}\,\frac{\tau s}{1+\tau s} = \frac{V_e\tau}{1+\tau s}$; $V_u(t) = \mathcal{L}^{-1}V_u(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{V_e}{\frac{1}{\tau}+s}\right) = V_e\,e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Se invece V_{co} è diverso da zero si ha: $V_u(s) = \frac{V_e}{s}\,\frac{\tau s}{1+\tau s} - \frac{\tau V_{co}}{1+\tau s}$,

e $V_u(t) = \mathcal{L}^{-1}V_u(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{V_e}{\frac{1}{\tau}+s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{V_{co}}{\frac{1}{\tau}+s}\right) = V_e\,e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{co}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Se il filtro viene eccitato da un'onda quadra di ampiezza V_e e periodo T (fig. 19), si distinguono due casi: (si suppone $V_{co}=0$)

Se $\frac{T}{2} \ll \tau$, $V_u(t)$ riproduce tanto meglio (Fig. 20) l'onda quadra quanto minore è il tilt $= \frac{\Delta V_e}{V_e}\,\%$ e quanto più grande è τ.

Se invece $\frac{T}{2} \gg \tau$,

$V_u(t) = V_e\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ e si ottiene la forma d'onda di fig. 21.

Si ottengono impulsi positivi e negativi ad andamento esponenziale, in quanto il circuito si comporta come quasi-derivatore, purché τ sia molto minore di $\frac{T}{2}$.

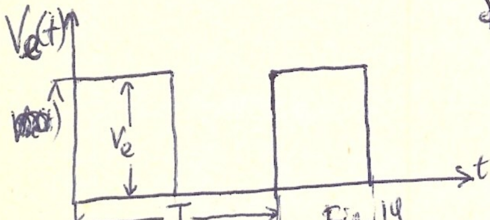


Fig. 19

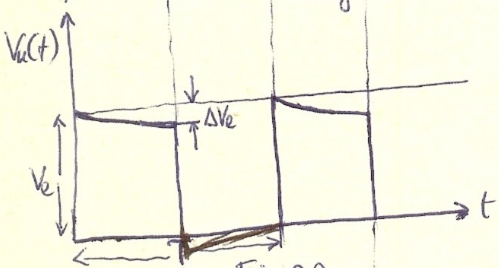


Fig. 20

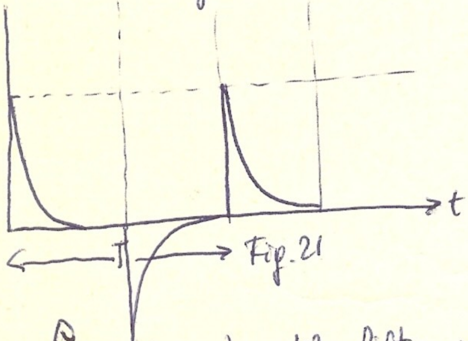


Fig. 21

La risposta del filtro passa alto alla rampa e, in particolare, all'onda triangolare, si ottiene introducendo la trasformata dell'eccitazione $V_e(t)=At$; $V_e(s)=\frac{A}{s^2}$. Per la funzione di eccitazione di fig. 12 si ha ($A=\frac{2V_e}{T}$):

$$V_u(s) = V_e(s)\cdot F(s) = \frac{A}{s^2}\,\frac{\tau s}{1+\tau s} = \frac{A\tau}{s(1+\tau s)} = \frac{A\tau}{s} - \frac{A\tau^2}{1+\tau s}$$

$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1}V_u(s) = \mathcal{L}^{-1}\frac{A\tau}{s} - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A\tau}{\frac{1}{\tau}+s}\right) = A\tau - A\tau e^{-\frac{t}{\tau}} = A\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{2V_e}{T}\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Si distinguono al solito due casi:

Se $\frac{T}{2} \ll \tau$; $V_u(t)$ approssima molto bene la $V_e(t)$, (Fig. 22)

Infatti, per $t \ll \tau$, $e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$

e $V_u(t) \simeq \frac{2V_e\tau}{T}\left(1 - 1 + \frac{t}{\tau}\right) = \frac{2V}{T} t$.

Se invece $\frac{T}{2} \gg \tau$, $V_u(t) = \frac{2V_e\tau}{T}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, (Fig. 23)

e il circuito si comporta come quasi-derivatore, purché τ sia molto minore di $\frac{T}{2}$.

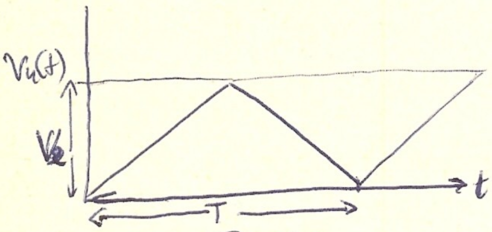


Fig. 22.

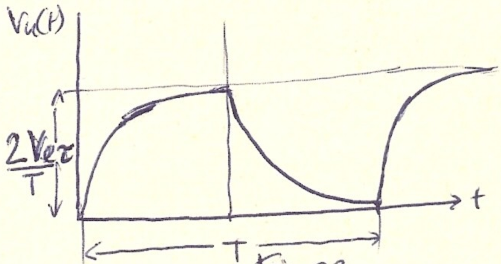


Fig. 23

Analogo comportamento presenta il filtro passa-alto RL, Fig. 24.

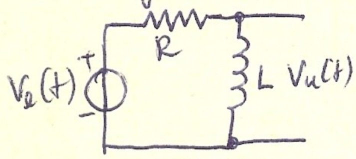


Fig. 24

$\mathcal{L}$-trasformando si ottiene il circuito di Fig. 25:

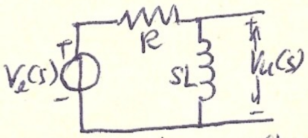


Fig. 25

$$V_u(s) = \frac{V_e(s)\,sL}{R + sL} = \frac{V_e(s)\,s\frac{L}{R}}{1 + \frac{L}{R}s} = \frac{V_e(s)\,\tau s}{1 + \tau s}, \text{ dove } \tau = \frac{L}{R}$$

$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_e(s)} = \frac{\tau s}{1 + \tau s} .$$

Caso generale di antitrasformazione della risposta $\mathcal{L}$-trasformata $V_u(s)$ di un sistema con m zeri e n poli:

Se $V_u(s) = \dfrac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots a_n s^n}$ (funzione razionale fratta della variabile s con a_i e b_i reali)

$V_u(s)$ si può trasformare nella seguente espressione, facendo riferimento agli m zeri e agli n poli: $V_u(s) = A \dfrac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_n)}$;

gli zeri sono le radici del polinomio al numeratore, i poli sono le radici del polinomio al denominatore (zeri e poli possono essere reali o complessi).

Per potere agevolmente antitrasformare $V_u(s)$, conviene scomporre la funzione razionale fratta in tante frazioni parziali corrispondenti ai singoli poli di $V_u(s)$, come illustrano i seguenti esempi:

1) Scomposizione di una funzione $V_u(s)$ con due zeri (z_1 e z_2) e tre poli ($s=0$ doppio, $s=p_1$ e $s=p_2$ semplici) in quattro frazioni parziali.

Si pone: $V_u(s) = \dfrac{A(s-z_1)(s-z_2)}{s^2(s-p_1)(s-p_2)} = \dfrac{K_1}{s} + \dfrac{K_2}{s^2} + \dfrac{K_3}{s-p_1} + \dfrac{K_4}{s-p_2}$;

(A costante)

Per determinare le costanti K_1, K_2, K_3 e K_4 (che prendono il nome di residui), si moltiplica $V_u(s)$ per s^2:

$$V_u(s)s^2 = \frac{A(s-z_1)(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)} = \underset{\downarrow 0}{K_1 s} + K_2 + \underset{\downarrow 0}{\frac{K_3 s^2}{s-p_1}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{K_4 s^2}{s-p_2}};$$

facendo tendere s a zero si ha:

$$\lim_{s\to 0} V_u(s)s^2 = \frac{A z_1 z_2}{p_1 p_2} = K_2$$ (gli altri termini si annullano).

Si moltiplica $V_u(s)$ per s:

$$V_u(s)\cdot s = \frac{A(s-z_1)(s-z_2)}{s(s-p_1)(s-p_2)} = K_1 + \frac{K_2}{s} + \frac{K_3 s}{s-p_1} + \frac{K_4 s}{s-p_2};$$

Si trasforma convenientemente l'espressione ottenuta e si fa tendere s all'infinito:

$$V_u(s)\cdot s = \frac{A\cancel{s}\left(1-\frac{z_1}{s}\right)\cdot\cancel{s}\left(1-\frac{z_2}{s}\right)}{\cancel{s}\cdot s\left(1-\frac{p_1}{s}\right)\cancel{s}\left(1-\frac{p_2}{s}\right)} = K_1 + \underset{\downarrow 0}{\frac{K_2}{s}} + \frac{K_3\cancel{s}}{\cancel{s}\left(1-\frac{p_1}{s}\right)} + \frac{K_4\cancel{s}}{\cancel{s}\left(1-\frac{p_2}{s}\right)};$$

$$\lim_{s\to\infty} V_u(s)\cdot s = 0 = K_1 + K_3 + K_4 \Rightarrow K_1 = -K_3 - K_4 ;$$

Si moltiplica $V_u(s)\cdot(s-p_1)$:

$$V_u(s)(s-p_1) = \frac{A(s-z_1)(s-z_2)}{s^2(s-p_2)} = \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{K_1}{s}(s-p_1)} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{K_2}{s^2}(s-p_1)} + K_3 + \underset{\downarrow \atop 0}{K_4\frac{(s-p_1)}{s-p_2}} ;$$

facendo tendere s a p_1 si ha:

$$\lim_{s\to p_1} V_u(s)(s-p_1) = \frac{A(p_1-z_1)(p_1-z_2)}{p_1^2(p_1-p_2)} = K_3 ;$$

Si moltiplica $V_u(s)\cdot(s-p_2)$:

$$V_u(s)\cdot(s-p_2) = \frac{A(s-z_1)(s-z_2)}{s^2(s-p_1)} = \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{K_1}{s}(s-p_2)} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{K_2}{s^2}(s-p_2)} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{K_3(s-p_2)}{s-p_1}} + K_4 ;$$

facendo tendere s a p_2 si ha:

$$\lim_{s\to p_2} V_u(s)\cdot(s-p_2) = \frac{A(p_2-z_1)(p_2-z_2)}{p_2^2(p_2-p_1)} = K_4 .$$

Pertanto i valori delle costanti K sono dati dalle seguenti espressioni:

$$K_2 = \frac{A z_1 z_2}{p_1 p_2} ; \quad K_3 = \frac{A(p_1-z_1)(p_1-z_2)}{p_1^2(p_1-p_2)} ; \quad K_4 = \frac{A(p_2-z_1)(p_2-z_2)}{p_2^2(p_2-p_1)} ; \quad K_1 = -K_3 - K_4$$

Esempio numerico:

$$V_u(s) = \frac{10(s-1)(s-3)}{s^2(s-2)(s-5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s-2} + \frac{K_4}{s-5} ;$$

zeri: $z_1 = 1$ e $z_2 = 3$; poli: $p_1 = 2$ e $p_2 = 5$; $A = 10$; $K_2 = 10\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5} = 3$;

$$K_3 = \frac{10(2-1)(2-3)}{2^2(2-5)} = \frac{10\cdot 1(-1)}{-12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} ;$$

$$K_4 = \frac{10(5-1)(5-3)}{5^2(5-2)} = \frac{\cancel{10}^{\,2}\cdot 4\cdot 2}{\cancel{25}_{\,5}\cdot 3} = \frac{16}{15} ; \quad K_1 = -K_3 - K_4 = -\frac{5}{6} - \frac{16}{15} = \frac{-25-32}{30} = -\frac{57}{30} ;$$

$$V_u(s) = -\frac{\left(\frac{57}{30}\right)}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{s-2} + \frac{\left(\frac{16}{15}\right)}{s-5} \simeq -\frac{1{,}9}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{0{,}84}{s-2} + \frac{1{,}067}{s-5}$$

$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1} V_u(s) = -\frac{57}{30} + 3t + \frac{5}{6}e^{2t} + \frac{16}{15}e^{5t}$$

$V_u(t)$ è l'antitrasformata, cioè la risposta nel dominio di t.

2) $$V_u(s) = \frac{A}{(s-p_1)^2(s-p_2)};$$

$V_u(s)$ ha due poli: $s=p_1$ doppio e $s=p_2$ semplice;

Si pone: $$V_u(s) = \frac{A}{(s-p_1)^2(s-p_2)} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{(s-p_1)^2} + \frac{K_3}{s-p_2};$$

$$V_u(s)\cdot(s-p_1)^2 = \frac{A}{s-p_2} = \underset{\downarrow 0}{K_1(s-p_1)} + K_2 + \underset{\downarrow 0}{\frac{K_3(s-p_1)^2}{s-p_2}};$$

$$\lim_{s\to p_1} V_u(s)(s-p_1)^2 = \frac{A}{p_1-p_2} = K_2$$

$$V_u(s)\cdot(s-p_1) = \frac{A\cancel{(s-p_1)}}{(s-p_1)^{\cancel{2}}(s-p_2)} = K_1 + \frac{K_2}{s-p_1} + K_3\frac{(s-p_1)}{s-p_2};$$

$$\lim_{s\to\infty} V_u(s)(s-p_1) = \underset{\downarrow 0}{\frac{A}{s(1-\frac{p_1}{s})s(1-\frac{p_2}{s})}} = K_1 + \underset{\downarrow 0}{\frac{K_2}{s-p_1}} + \underset{\downarrow K_3}{\frac{K_3\cancel{s}(1-\frac{p_1}{s})}{\cancel{s}(1-\frac{p_2}{s})}};$$

$$0 = K_1 + K_3 \longrightarrow K_1 = -K_3;$$

$$V_u(s)(s-p_2) = \frac{A}{(s-p_1)^2} = \underset{\downarrow 0}{\frac{K_1(s-p_2)}{s-p_1}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{K_2(s-p_2)}{(s-p_1)^2}} + K_3;$$

$$\lim_{s\to p_2} V_u(s)(s-p_2) = \frac{A}{(p_2-p_1)^2} = K_3;$$

Pertanto si ha: $K_1 = -K_3$, $K_2 = \frac{A}{p_1-p_2}$, $K_3 = \frac{A}{(p_2-p_1)^2}$.

Esempio numerico.

$$V_u(s) = \frac{100}{(s-5)^2(s-3)} = \frac{K_1}{s-5} + \frac{K_2}{(s-5)^2} + \frac{K_3}{s-3}$$

$p_1 = 5$
$p_2 = 3$
$A = 100$

$$K_2 = \frac{100}{5-3} = 50, \quad K_3 = \frac{100}{(3-5)^2} = \frac{100}{4} = 25;$$

$$K_1 = -25$$

$$V_u(s) = -\frac{25}{s-5} + \frac{50}{(s-5)^2} + \frac{25}{s-3};$$

$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1}V_u(s) = -25e^{5t} + 50\,t\,e^{5t} + 25e^{3t}$$ (antitrasformata.)

Sistemi di 2° ordine

(con due elementi reattivi L e C → 2 poli).

Consideriamo il circuito RLC di Fig. 25:

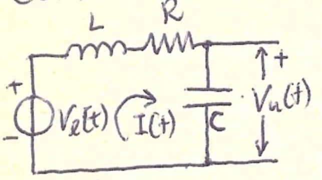


Fig.25

Scriviamo l'equazione del circuito:

(V_{c0} è la tensione iniziale ai capi di C)

$$V_e(t) - L\frac{dI(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt - V_{c0} = RI(t).$$

$\mathcal{L}$-trasformando si ha:

$$V_e(s) - Ls\,I(s) - \frac{1}{sC}I(s) - \frac{V_{c0}}{s} = RI(s).$$

con $I(0)=0$

La rete $\mathcal{L}$-trasformata è rappresentata in Fig. 26.

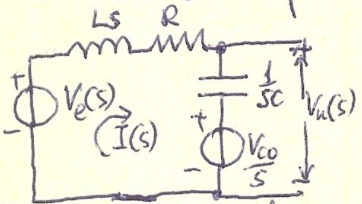


Fig.26

$$I(s) = \frac{V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}}{Ls + \frac{1}{sC} + R},$$

$$V_u(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{V_{c0}}{s} = \frac{V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}}{\left(Ls + \frac{1}{sC} + R\right)}\frac{1}{sC} + \frac{V_{c0}}{s} =$$

$$= \frac{V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}}{\frac{LCs^2 + 1 + RCs}{sC}}\cdot\frac{1}{sC} + \frac{V_{c0}}{s} = \frac{V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 1 + \frac{2\gamma s}{\omega_0}} + \frac{V_{c0}}{s} = \frac{\left(V_e(s) - \frac{V_{c0}}{s}\right)\omega_0^2}{s^2 + 2\gamma\omega_0 s + \omega_0^2} + \frac{V_{c0}}{s},$$

dove $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ (ω_0 è la pulsazione di risonanza)

$$\gamma^2 = \frac{R^2}{\frac{4L}{C}}\ ;\quad \gamma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\ ;\quad \text{pertanto } RC \text{ diventa } 2\cdot\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\sqrt{LC} = 2\gamma/\omega_0$$

γ è il coefficiente di smorzamento.

$$V_u(s) = \frac{V_e(s)\,\omega_0^2}{s^2 + 2\gamma\omega_0 s + \omega_0^2} - \frac{V_{c0}\,\omega_0^2}{s(s^2 + 2\gamma\omega_0 s + \omega_0^2)} + \frac{V_{c0}}{s}.$$

Calcoliamo le radici dell'equazione $s^2 + 2\gamma\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$:

$$s = -\omega_0\gamma \pm \sqrt{\gamma^2\omega_0^2 - \omega_0^2} = -\omega_0\gamma \pm \omega_0\sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

L'equazione ha due radici, che sono
- reali e distinte, se $\gamma > 1$
- reali e uguali, se $\gamma = 1$
- complesse coniugate, se $\gamma < 1$

$V_u(s)$ ha pertanto due poli p_1 e p_2 e può essere trasformata come segue:

$$V_u(s) = \frac{V_e(s)\,\omega_0^2}{(s-p_1)(s-p_2)} - \frac{V_{c0}\,\omega_0^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} + \frac{V_{c0}}{s}.$$

Se $V_e(s) = \frac{V_e}{s}$ (trasformata del gradino di ampiezza V_e), si ha:

$$V_u(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} + \frac{V_{c0}}{s}.$$

Distinguiamo tre casi: $\gamma > 1$, $\gamma = 1$ e $\gamma < 1$.

1° caso - $\gamma > 1$ (radici reali e distinte) $p_1 = \alpha + \beta$, $p_2 = \alpha - \beta$ con $\alpha = -\omega_0\gamma$ e $\beta = \omega_0\sqrt{\gamma^2-1}$,

Pertanto si ha:

$$V_u(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha-\beta)(s-\alpha+\beta)} + \frac{V_{c0}}{s}.$$

Poniamo:

$$V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha-\beta)(s-\alpha+\beta)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-\alpha-\beta} + \frac{K_3}{s-\alpha+\beta};$$

la funzione ha tre poli: $s=0$, $s=\alpha+\beta$, $s=\alpha-\beta$.

$$s\,V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{(s-\alpha-\beta)(s-\alpha+\beta)} = K_1 + \underbrace{\frac{K_2 s}{s-\alpha-\beta}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{K_3 s}{s-\alpha+\beta}}_{\to 0};$$

$$\lim_{s\to 0} s V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{\alpha^2 - \beta^2} = K_1 \quad \text{ma } \alpha^2 - \beta^2 = \cancel{\omega_0^2\gamma^2} - \cancel{\omega_0^2\gamma^2} + \omega_0^2 = \omega_0^2;$$

$$K_1 = V_e - V_{c0}.$$

$$(s-\alpha-\beta)\cdot V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha+\beta)} = \frac{K_1}{s}\underbrace{(s-\alpha-\beta)}_{\to 0} + K_2 + \underbrace{\frac{K_3(s-\alpha-\beta)}{s-\alpha+\beta}}_{\to 0};$$

$$\lim_{s\to\alpha+\beta} V_u'(s)(s-\alpha-\beta) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{(\alpha+\beta)(\cancel{\alpha}+\beta-\cancel{\alpha}+\beta)} = K_2;$$

$$K_2 = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{2\beta(\alpha+\beta)}.$$

$$(s-\alpha+\beta)\cdot V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha-\beta)} = \frac{K_1}{s}\underbrace{(s-\alpha+\beta)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{K_2(s-\alpha+\beta)}{s-\alpha-\beta}}_{\to 0} + K_3$$

$$\lim_{s\to\alpha-\beta} (s-\alpha+\beta) V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{(\alpha-\beta)(\cancel{\alpha}-\beta-\cancel{\alpha}-\beta)} = K_3$$

$$K_3 = -\frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{2\beta(\alpha-\beta)}. \qquad V_u(s) = V_u'(s) + \frac{V_{c0}}{s}$$

$$V_u(s) = \frac{V_e - \cancel{V_{c0}}}{s} + \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{2\beta(\alpha+\beta)(s-\alpha-\beta)} - \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{2\beta(\alpha-\beta)(s-\alpha+\beta)} + \frac{\cancel{V_{c0}}}{s}.$$

Pertanto l'antitrasformata $V_u(t)$ ha la seguente espressione:

$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1} V_u(s) = V_e + \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{2\beta(\alpha+\beta)} e^{(\alpha+\beta)t} - \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{2\beta(\alpha-\beta)} e^{(\alpha-\beta)t} .$$

Entrambi gli esponenziali sono decrescenti e $V_u(t)$ ha la forma di Fig. 27., dove vengono riportati gli andamenti di $V_u(t)$ per diversi valori di γ (coefficiente di smorzamento), con $V_{c0} = 0$.

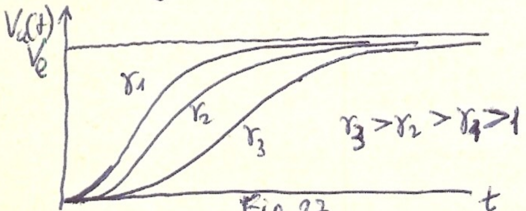


Fig. 27

2° caso - $\gamma = 1$ $\qquad p_1 = p_2 = \alpha$

$$V_u(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha)^2} + \frac{V_{c0}}{s} ;$$

Poniamo:

$$V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-\alpha} + \frac{K_3}{(s-\alpha)^2} ;$$

$$(s-\alpha)^2 V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s} = \underset{\downarrow\, 0}{\frac{K_1}{s}(s-\alpha)^2} + \underset{\downarrow\, 0}{K_2(s-\alpha)} + K_3 ;$$

$$\lim_{s\to\alpha} (s-\alpha)^2 V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{\alpha} = K_3 , \quad \to K_3 = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{-\omega_0\gamma} = \frac{(V_e - V_{c0})}{-\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ma $\alpha = -\omega_0\gamma$, $\gamma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$K_3 = -\frac{(V_e - V_{c0})2}{RC}$

ma $R^2C = 4L$

$R \cdot RC = 4L$

$RC = \frac{4L}{R}$

e $K_3 = -\frac{2(V_e - V_{c0})R}{4L}$

$$\boxed{K_3 = -(V_e - V_{c0})\frac{R}{2L}}$$

$$(s-\alpha) V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha)} = \frac{K_1(s-\alpha)}{s} + K_2 + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{K_3}{s-\alpha}} ;$$

$$\lim_{s\to\infty} (s-\alpha) V_u'(s) = 0 = K_1 + K_2 \quad \to K_2 = -K_1 ;$$

$$s V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{(s-\alpha)^2} = K_1 + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{K_2 s}{s-\alpha}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{K_3 s}{(s-\alpha)^2}}$$

$$\lim_{s\to 0} s V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{\alpha^2} = K_1 ; \quad K_1 = \frac{(V_e - V_{c0})\cancel{\omega_0^2}}{\cancel{\omega_0^2}\gamma^2} = \frac{(V_e - V_{c0})}{\frac{R^2}{4}\frac{C}{L}} = \frac{(V_e - V_{c0})4L}{R \cdot RC} = V_e - V_{c0}$$

, essendo $RC = \frac{4L}{R}$

Pertanto si ha:

$$V_u(s) = V_u'(s) + \frac{V_{c0}}{s} = \frac{V_e - \cancel{V_{c0}}}{s} - \frac{(V_e - V_{c0})}{s-\alpha} - \frac{(V_e - V_{c0})}{(s-\alpha)^2} \cdot \frac{R}{2L} + \frac{\cancel{V_{c0}}}{s}$$

$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1} V_u(s) = V_e - (V_e - V_{c0}) e^{\alpha t} - \frac{R}{2L}(V_e - V_{c0}) t e^{\alpha t} ,$$

ma $\alpha = -\omega_0\gamma = -\frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = -\frac{R}{2L}$,

$$V_u(t) = V_e - (V_e - V_{c0})\, e^{-\frac{R}{2L}t} - (V_e - V_{c0})\frac{R}{2L}\, t\, e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Se in particolare $V_{c0} = 0$,

$$V_u(t) = V_e\left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t}\right) - V_e\frac{R}{2L}\, t\, e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

L'andamento di $V_u(t)$ per $\gamma = 1$ e $V_{c0} = 0$ è rappresentato in Fig.28, e corrisponde al cosiddetto smorzamento critico.

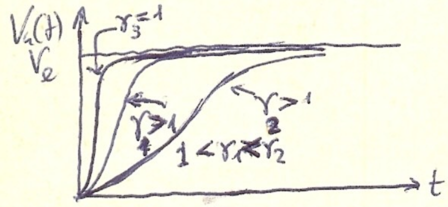


Fig.28

3° caso $-$ $\gamma < 1$

Se $\gamma < 1$, si hanno oscillazioni smorzate con costante di smorzamento $\alpha = -\omega_0\gamma$ $\alpha = -\frac{R}{2L}$ e frequenza $\omega = \beta = \omega_0\sqrt{1-\gamma^2}$;

I poli sono complessi coniugati e sono dati dalle espressioni:

$$p_1 = \alpha + j\beta = -\frac{R}{2L} + j\omega,$$
$$p_2 = \alpha - j\beta = -\frac{R}{2L} - j\omega.$$

$$V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-\alpha-j\beta} + \frac{K_3}{s-\alpha+j\beta},$$

$V_u'(s)$ ha tre poli: $s = 0$, $s = \alpha + j\beta$ e $s = \alpha - j\beta$;

$$s V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} = K_1 + \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{K_2 s}{s-\alpha-j\beta}} + \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{K_3 s}{s-\alpha+j\beta}};$$

$$\lim_{s\to 0} s V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{\alpha^2 + \beta^2} = K_1 \quad \text{ma } \alpha^2 + \beta^2 = \omega_0^2\gamma^2 + \omega_0^2 - \omega_0^2\gamma^2 = \omega_0^2$$

$$\text{e } K_1 = V_e - V_{c0}$$

$$(s-\alpha-j\beta)V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{s(s-\alpha+j\beta)} + \frac{K_1}{s}\underset{\downarrow\atop 0}{(s-\alpha-j\beta)} + K_2 + K_3\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{(s-\alpha-j\beta)}{s-\alpha+j\beta}}$$

$$\lim_{s\to\alpha+j\beta} V_u'(s)(s-\alpha-j\beta) = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{(\alpha+j\beta)(\alpha+j\beta-\alpha+j\beta)} = K_2 \;;\quad K_2 = \frac{(V_e - V_{c0})\omega_0^2}{\underset{\downarrow\atop \arg = 90^\circ}{2j\beta}\;\underset{\downarrow\atop \arg = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = \varphi}{(\alpha+j\beta)}};$$

22

$$|K_2| = \frac{(V_e - V_{co})\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{(V_e - V_{co})\omega_0^2}{2\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}\,\omega_0} = \frac{V_e - V_{co}}{2\sqrt{1-\gamma^2}}$$

$$K_2 = |K_2|\, e^{-j\varphi - j90^\circ} = |K_2|\, e^{-j(\varphi+90^\circ)}$$

ma $\beta = \omega_0\sqrt{1-\gamma^2}$ e l'argomento di K_2 è dato da $0^\circ - 90^\circ - \varphi$

$\alpha^2 + \beta^2 = \omega_0^2$

$$\angle K_2 = -90^\circ - \varphi$$

, dove $\varphi = \text{arctg}\,\frac{\beta}{\alpha} = \text{arctg}\,\frac{\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}{-\omega_0\gamma} = -\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)$ $\boxed{+180^\circ}$

$$(s-\alpha+j\beta)V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{co})\omega_0^2}{s\,(s-\alpha-j\beta)} = \underbrace{\frac{K_1}{s}(s-\alpha+j\beta)}_{0} + \underbrace{\frac{K_2(s-\alpha+j\beta)}{s-\alpha-j\beta}}_{0} + K_3$$

$$\lim_{s\to\alpha-j\beta}(s-\alpha+j\beta)V_u'(s) = \frac{(V_e - V_{co})\omega_0^2}{(\alpha-j\beta)(\cancel{\alpha}-j\beta-\cancel{\alpha}-j\beta)} = K_3$$

$$K_3 = \underbrace{-}_{180^\circ}\frac{(V_e - V_{co})\omega_0^2}{\underbrace{2j\beta}_{\arg = 90^\circ}\underbrace{(\alpha-j\beta)}_{\arg = \text{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = -\varphi}} \quad ; \quad |K_3| = \frac{(V_e - V_{co})\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{(V_e - V_{co})}{2\sqrt{1-\gamma^2}} = |K_2|$$

Pertanto l'argomento di K_3 è dato da: $180^\circ - 90^\circ - (-\varphi) = 90^\circ + \varphi$

$$K_3 = |K_3|\, e^{j\varphi + j90^\circ} = |K_2|\, e^{j(\varphi+90^\circ)} \qquad \angle K_2 = 90^\circ + \varphi$$

$$V_u(s) = V_u'(s) + \frac{V_{co}}{s} = \frac{V_e - \cancel{V_{co}}}{s} + \frac{\cancel{V_{co}}}{s} + \frac{|K_2|\, e^{-j(\varphi+90^\circ)}}{s-\alpha-j\beta} + \frac{|K_2|\, e^{j(\varphi+90^\circ)}}{s-\alpha+j\beta}$$

$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1}V_u(s) = V_e + |K_2|\, e^{(\alpha+j\beta)t - j(\varphi+90^\circ)} + |K_2|\, e^{(\alpha-j\beta)t + j(\varphi+90^\circ)} =$$

$$= V_e + |K_2|\, e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t - \varphi - 90^\circ)} + e^{-j(\beta t - \varphi - 90^\circ)}\right] =$$

$$= V_e + \frac{(V_e - V_{co})}{\sqrt{1-\gamma^2}}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\frac{e^{j(\beta t - \varphi - 90^\circ)} + e^{-j(\beta t - \varphi - 90^\circ)}}{2}\right] =$$

(per la formula di Eulero $\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$),

$$= V_e + \frac{(V_e - V_{co})}{\sqrt{1-\gamma^2}}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t - \varphi - 90^\circ) = V_e + \frac{(V_e - V_{co})}{\sqrt{1-\gamma^2}}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\,\text{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$\cos(\omega t - \varphi - 90^\circ) = \cos[90^\circ - (\omega t - \varphi)] = \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$V_u(t) = V_e + \frac{V_e}{\sqrt{1-\gamma^2}}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\,\text{sen}(\omega t - \varphi)$$

Se $V_{co} = 0$

L'andamento di $V_u(t)$ per $V_{C0}=0$ è rappresentato in Fig. 29.

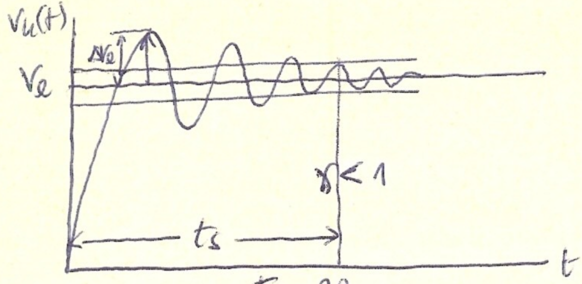


Fig-29

$100\,\dfrac{\Delta V_e}{V_e}$ è la sovraelongazione, (overshoot), espressa in percentuale rispetto al valore finale V_e (valore a regime).

t_s è il settling time, definito come il tempo necessario perché $V_u(t)$ si approssimi al valore V_e entro un certo intervallo prefinato, (di solito pari al 5% di V_e).

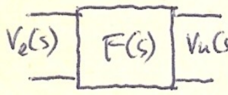
$\dfrac{\Delta V_e}{V_e}$ e t_s sono tanto più piccoli quanto maggiore è γ. $(0<\gamma<1)$

Se $\gamma=0$ il sistema diventa instabile e si hanno oscillazioni permanenti.

Consideriamo una generica funzione di trasferimento $F(s)=\dfrac{V_u(s)}{V_e(s)}$;

sia ad esempio $F(s) = \dfrac{A(s-2)(s-5)}{s^2(s-7)(s-1)} = \dfrac{V_u(s)}{V_e(s)}$.

Se eccitiamo la rete che ha per funzione di trasferimento $F(s)$,



con un segnale sinusoidale ed otteniamo la risposta $V_u(t)$ col metodo della trasformata di Laplace, notiamo che la risposta ottenuta è identica a quella che si ottiene applicando il metodo simbolico valido per i segnali sinusoidali. In particolare, per ottenere la risposta in frequenza della rete, basta sostituire alla variabile complessa s la variabile $j\omega$:

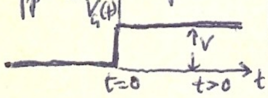
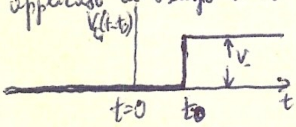
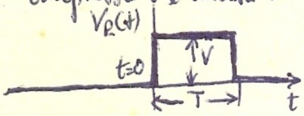
$$F(j\omega) = \frac{V_u e^{j(\omega t+\varphi)}}{V_e e^{j\omega t}} = \frac{A(j\omega-2)(j\omega-5)}{-\omega^2(j\omega-7)(j\omega-1)}$$

; $F(j\omega)\cdot V_e e^{j\omega t}$ è un numero complesso che definisce la risposta $V_u(t)$ in modulo e fase.

La funzione di trasferimento ottenuta $F(j\omega)$ coincide pertanto con la funzione di trasferimento che si ottiene applicando direttamente il metodo simbolico.

Ovviamente il metodo della trasformata di Laplace è un metodo di impiego generale per qualsiasi tipo di eccitazione, ed in particolare per l'eccitazione sinusoidale.

TABELLA DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE DI USO FREQUENTE

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$	$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1	$A \operatorname{sen} \omega t$ $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione espressa in rad/sec.	$\dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$
$V_G(t)$ gradino di ampiezza V applicato al tempo $t=0$ 	$\dfrac{V}{s}$	$A \cos \omega t$	$\dfrac{As}{s^2+\omega^2}$
$V_G(t-t_0)$ gradino di ampiezza V applicato al tempo $t=t_0$ 	$e^{-st_0}\dfrac{V}{s}$	$A\left(\dfrac{1-e^{-kt}}{k}\right)$	$\dfrac{A}{s(s+k)}$
		At (rampa)	$\dfrac{A}{s^2}$
$V_R(t)$ impulso rettangolare di ampiezza V e durata T 	$\dfrac{V}{s}\left(1-e^{-Ts}\right)$	At^2 (parabola)	$\dfrac{2A}{s^3}$
		At^n	$\dfrac{An!}{s^{n+1}}$
		$A t e^{-kt}$	$\dfrac{A}{(s+k)^2}$
Ae^{-kt} funzione esponenziale decrescente (con $K>0$)	$\dfrac{A}{s+K}$	$A\left(\dfrac{kt-1+e^{-kt}}{k^2}\right) =$	$\dfrac{A}{s^2(s+k)}$
Ae^{Kt} funzione esponenziale crescente (con $K>0$)	$\dfrac{A}{s-K}$	$A\left(\dfrac{e^{-K_1t}-e^{-K_2t}}{K_2-K_1}\right)$	$\dfrac{A}{(s+K_1)(s+K_2)}$
$Ae^{-(\alpha+j\beta)t}$ funzione esponenziale complessa	$\dfrac{A}{s+\alpha+j\beta}$	$\dfrac{A}{K_1K_2}\left(1-\dfrac{K_1e^{-K_2t}}{K_1-K_2}+\dfrac{K_2e^{-K_1t}}{K_1-K_2}\right)$	$\dfrac{A}{s(s+K_1)(s+K_2)}$
$Ae^{(\alpha+j\beta)t}$ funzione esponenziale complessa	$\dfrac{A}{s-\alpha-j\beta}$		
$Ae^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega t$	$\dfrac{A\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$		

(A è una costante positiva o negativa)

Proprietà e teoremi fondamentali della trasformata di Laplace. $\left(F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \right)$

1) $\mathcal{L}\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)\right] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) + \dots + a_n F_n(s)$

2) $\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\right] = e^{-st_0} F(s)$ (teorema di traslazione nel campo reale)

3) $\mathcal{L}\left[f(t)\, e^{s_0 t}\right] = F(s-s_0)$ (teorema di traslazione nel campo complesso)

4) $\mathcal{L}\left[\frac{d f(t)}{dt}\right] = s F(s) - f(0^+)$

5) Se $f(0^+)=0, \frac{df}{dt}(0^+)=0, \frac{d^2 f}{dt^2}(0^+)=0, \dots \frac{d^{n-1} f(0^+)}{d t^{n-1}} = 0$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{d t^n}\right] = s^n F(s)$$

In particolare, per $n=2$, si ha:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - s f(0^+) - \left[\frac{d f(t)}{dt}\right]_{t \to 0^+}$$

6) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

7) $\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t}_{n \text{ volte}} f(t)\, dt\right] = \frac{F(s)}{s^n}$

8) $\lim_{s \to \infty} s \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s F(s)$ (teorema del valore iniziale)

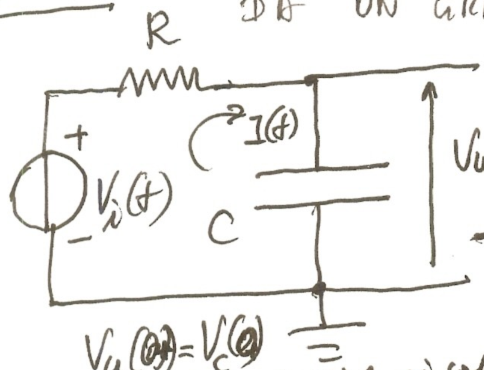
9) $\lim_{s \to 0} s \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s F(s)$ (teorema del valore finale)

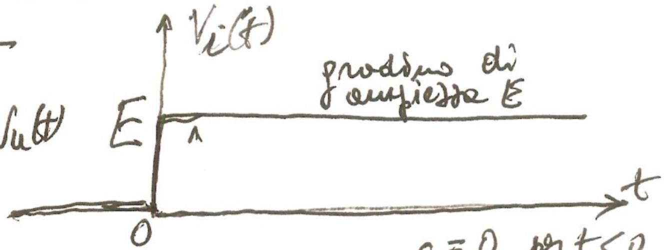
10) $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = \tau F(\tau s)$

ESERCIZI

CIRCUITO RC ECCITATO DA UN GRADINO DI AMPIEZZA E

1





$$V_i(t) \begin{cases} = 0, \text{ per } t<0 \\ = E, \text{ per } t>0 \end{cases}$$

$V_u(0) = V_C(0)$ tensione iniziale ai capi di C $\neq 0$

Equazione del circuito (2ª legge di Kirchhoff)

I metodo (equazione differenziale)

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = RC\frac{dV_u(t)}{dt}$$

$$V_i(t) - V_u(t) = RI(t) = RC\frac{dV_u(t)}{dt}.$$

$\mathcal{L}$-Trasformazione.

$$V_i(s) - V_u(s) = RI(s) = RC\,\mathcal{L}\left[\frac{dV_u(t)}{dt}\right] = RC\left[sV_u(s) - V_u(0)\right]$$

$$V_i(s) - V_u(s) = RCs\,V_u(s) - RC\,V_c(0)$$

$$\frac{E}{s} + RC\,V_c(0) = V_u(s)\left[1 + RCs\right]$$

$$V_u(s) = \frac{E}{s(1+RCs)} + \frac{RC\,V_c(0)}{1+RCs} =$$

$\tau = RC$

$$= \frac{E}{s(1+\tau s)} + \frac{\tau V_c(0)}{1+\tau s}$$

$$\frac{E}{s(1+\tau s)} = \frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{\tau}}$$

poli: $p_1 = 0$; $p_2 = -\frac{1}{\tau}$

CALCOLO DEI RESIDUI A, B :

2

$$A = \lim_{\substack{s \to p_1 \\ (p_1 = 0)}} \cancel{(s - p_1)} \frac{E}{\tau \cancel{s}\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} = E$$

$$B = \lim_{\substack{s \to p_2 \\ p_2 = -\frac{1}{\tau}}} (s - p_2) \frac{E}{\tau s \left(s+\frac{1}{\tau}\right)} = \lim_{s \to p_2 = -\frac{1}{\tau}} \frac{\cancel{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} E}{\tau s \cancel{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}} =$$

$$= \frac{E}{\tau\left(-\frac{1}{\tau}\right)} = -E$$

$$\frac{E}{s(1+\tau s)} = \frac{E}{s} - \frac{E}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$V_u(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{\cancel{\tau} V_c(0)}{\cancel{\tau}\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

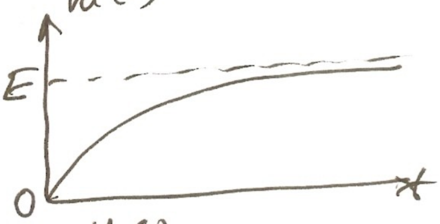
$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1} V_u(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{E}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E}{s+\frac{1}{\tau}}\right] + V_c(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right] =$$

$$= E - E e^{-\frac{t}{\tau}} + V_c(0) e^{-t/\tau} =$$

$$= E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + V_c(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$ (legge generale di carica del condensatore)

Se $V_c(0) = 0$

$$V_u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Teorema del valore finale:

$$\lim_{t \to \infty} V_u(t) = \lim_{s \to 0} s \mathcal{L}\left[V_u(t)\right] = \lim_{s \to 0} s V_u(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\cancel{s} \frac{E}{\cancel{s}} - \cancel{\frac{s E}{s+\frac{1}{\tau}}} + \cancel{\frac{s V_c(0)}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}} \right] = E$$

2 bis

Teorema del valore iniziale:

$$\lim_{t \to 0} V_u(t) = \lim_{s \to \infty} s V_u(s) =$$

$$= \lim_{s \to \infty} s \left[\frac{E}{s} - \frac{E}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{V_C(0)}{s+\frac{1}{\tau}} \right] =$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left[\underbrace{s \frac{E}{s}}_{\cancel{E}} - \underbrace{\frac{s\,E}{s+\frac{1}{\tau}}}_{-\cancel{E}} + \underbrace{\frac{s\,V_C(0)}{s+\frac{1}{\tau}}}_{+V_C(0)} \right] =$$

$$= E - E + V_C(0) = V_C(0)$$

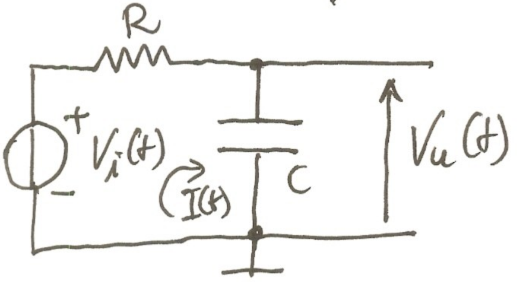
N. B.: La funzione di trasferimento del sistema $F(s)$ si ottiene considerando nulla la condizione iniziale $V_C(0)=0$, come rapporto tra la trasformata della risposta $V_u(s)$ e la trasformata dell'eccitazione $V_i(s) = \frac{E}{s}$:

$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{V_u(s)}{\frac{E}{s}} = \frac{1}{1+\tau s}$$

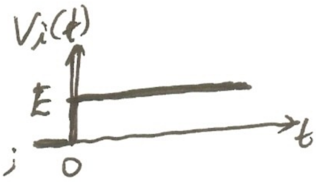
$\tau = RC$

funzione di trasferimento del I ordine (di tipo passa basso) con un solo polo reale $p = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{RC}$

II metodo (equazione integrale) 3



$V_u(0) = V_c(0)$
tensione iniziale ai capi di C.



$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}\ ; \quad V_u(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\int I(t)\,dt}{C}\ ;$$

$$Q(t) = \int I(t)\,dt \qquad \int I(t)\,dt = \int_0^t I(t)\,dt + V_c(0)$$

Equazione integrale del circuito (2ª legge di Kirchhoff)

$$V_i(t) - V_u(t) = R\,I(t)$$

$$V_i(t) - \frac{\int I(t)\,dt}{C} = R\,I(t)\ ; \quad \boxed{V_i(t) - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt - V_c(0) = R I(t);}$$

$\mathcal{L}$ - trasformazione dell'equazione integrale ↑

$$\mathcal{L}[V_i(t)] - \frac{1}{C}\mathcal{L}\left[\int_0^t I(t)\,dt\right] - \mathcal{L}[V_c(0)] = R\,\mathcal{L}[I(t)];$$

$$V_i(s) - \frac{I(s)}{sC} - \frac{V_c(0)}{s} = R\,I(s)\ ;$$

$V_i(s) = \frac{E}{s}$ trasformata del gradino di ampiezza E

$$\frac{E}{s} - \frac{V_c(0)}{s} = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s)$$

Si ottiene così la trasformata dell'intensità di corrente:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s} - \frac{V_c(0)}{s}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{E - V_c(0)}{\cancel{s}\left(\frac{RCs+1}{\cancel{s}C}\right)}\ ;$$

$$I(s) = \frac{C\,[E - V_c(0)]}{RCs + 1}$$

4

Antitrasformando $I(s)$ si ottiene $I(t)$:

$$I(t) = \mathcal{L}^{-1} I(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C(E - V_c(0))}{RCs+1}\right] = C\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E-V_c(0)}{\tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right] =$$

$\tau = RC$

$$= \frac{\cancel{C}}{R\cancel{C}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E-V_c(0)}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = \frac{1}{R}\left[E-V_c(0)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Sostituendo $I(t)$ nell'equazione del circuito

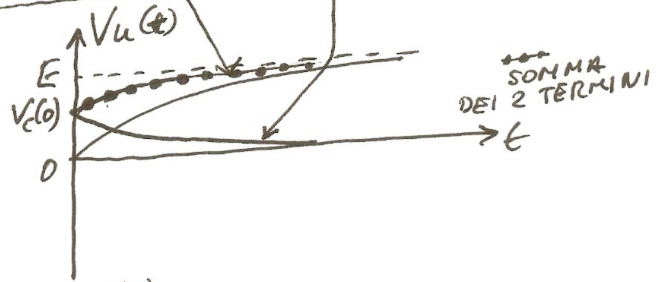
$$V_i(t) - V_u(t) = R\,I(t)\text{, si ha:}$$

$$V_u(t) = V_i(t) - R\,I(t) =$$

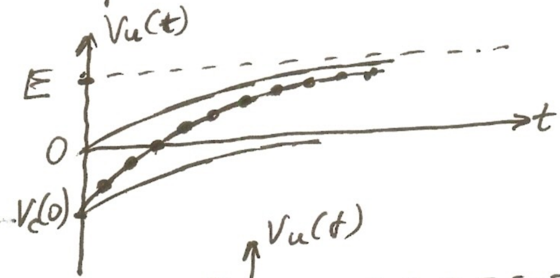
$$= E - \cancel{R}\cdot\frac{1}{\cancel{R}}\left[E-V_c(0)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} + V_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$V_u(t) = E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + V_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$ (legge generale di carica del condensatore)

Se $V_c(0) > 0$



Se $V_c(0) < 0$

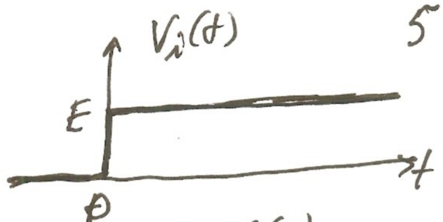


Se $V_c(0) = 0$ si ottiene la nota legge di carica del condensatore

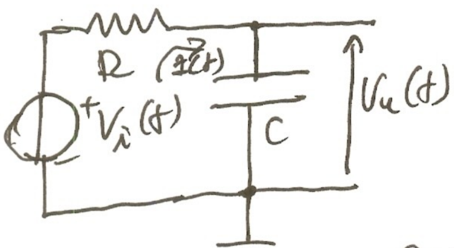
III metodo

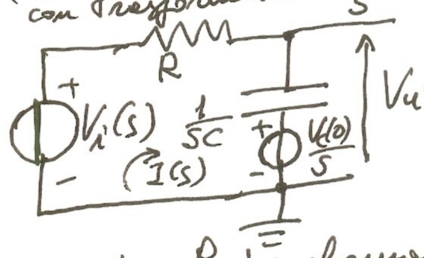
5

Si passa dallo schema circuitale nel dominio del tempo allo schema circuitale nel dominio di s



con $V_u(0) = V_c(0)$ (condizione iniziale) con trasformata $\frac{V_c(0)}{s}$





Si sostituisce $C \rightarrow \frac{1}{sC}$ Circuito $\mathcal{L}$-trasformato

Si applica la 2ª legge di Kirchhoff:

$$V_i(s) - \frac{V_c(0)}{s} = R\,I(s) + \frac{I(s)}{sC}$$

$$I(s) = \frac{V_i(s) - \frac{V_c(0)}{s}}{R + \frac{1}{sC}} \quad ; \quad V_i(s) = \frac{E}{s}$$

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s} - \frac{V_c(0)}{s}}{\frac{RCs+1}{sC}} = \frac{E - V_c(0)}{\cancel{s}\,\frac{(RCs+1)}{\cancel{s}C}} = \frac{C[E - V_c(0)]}{RCs+1} = \frac{C[E-V_c(0)]}{\tau s + 1};$$

$\tau = RC.$

$$V_u(s) = I(s)\cdot\frac{1}{sC} + \frac{V_c(0)}{s} =$$

$$= \frac{\cancel{C}[E - V_c(0)]}{(\tau s + 1)\cdot s\cancel{C}} + \frac{V_c(0)}{s} = \frac{E - V_c(0)}{s(1+\tau s)} + \frac{V_c(0)}{s} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{V_c(0)}{s}$$

Calcolo dei residui A e B dello sviluppo di 6

poli: $p_1 = 0$ e $p_2 = -\frac{1}{\tau}$

$$\frac{E - V_C(0)}{s(1+\tau s)}$$

$$A = \lim_{s \to p_1} \frac{(\cancel{s} - \cancel{p_1}) \cdot [E - V_C(0)]}{\cancel{s}(1+\cancel{\tau s})} = E - V_C(0)$$

$$A = E - V_C(0)$$

$$B = \lim_{s \to p_2} \frac{(s - p_2)[E - V_C(0)]}{s\,\tau\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} = \lim_{s \to -\frac{1}{\tau}} \frac{\cancel{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}[E - V_C(0)]}{\left(-\frac{1}{\cancel{\tau}}\right)\cancel{\tau}\cancel{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}} =$$

$$p_2 = -\frac{1}{\tau}$$

$$= -[E - V_C(0)]$$

$$V_u(s) = \frac{E - V_C(0)}{s} - \frac{[E - V_C(0)]}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{V_C(0)}{s} =$$

$$= \frac{E}{s} - \cancel{\frac{V_C(0)}{s}} - \frac{E}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{V_C(0)}{s + \frac{1}{\tau}} + \cancel{\frac{V_C(0)}{s}}$$

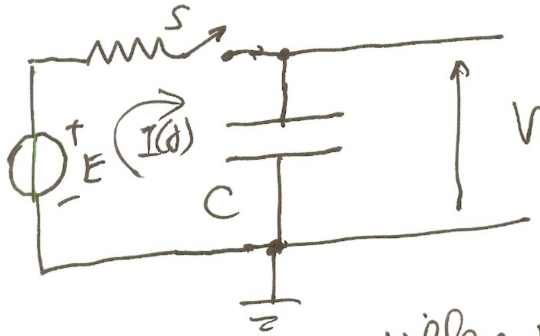
$$V_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E}{s} - \frac{E}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{V_C(0)}{s + \frac{1}{\tau}}\right] = E - E e^{-\frac{t}{\tau}} + V_C(0) e^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$= E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + V_C(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

IV metodo

Risoluzione dell'equazione differenziale del circuito

$V_c(0)$



$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\,\frac{dV_u(t)}{dt}$$

Equazione differenziale del circuito (2ª legge di Kirchhoff)

$$E - V_u(t) = R\,I(t) = RC\,\frac{dV_u(t)}{dt}.$$

$$E - V_u(t) = RC\,\frac{dV_u(t)}{dt}$$

(equazione differenziale del I ordine, a coefficienti costanti e ~~del~~ tipo a variabili separabili)

$$[E - V_u(t)]\,dt = RC\,dV_u(t); \qquad \frac{dt}{RC}\cdot[E - V_u(t)] = dV_u(t);$$

$$\int \frac{dt}{RC} = \int \frac{dV_u(t)}{E - V_u(t)};$$

$$\frac{t}{RC} = -\ln[E - V_u(t)] + C$$

Dovendo essere $V_u(0) = V_c(0)$ per $t = 0$, si ha:

$$0 = -\ln[E - V_c(0)] + C;$$

$$C = \ln[E - V_c(0)].$$

$$\frac{t}{RC} = -\ln[E - V_u(t)] + \ln[E - V_c(0)]$$

$$\frac{t}{RC} = \ln \frac{E - V_C(0)}{E - V_u(t)} ;$$

Per definizione di logaritmo si ha:

$$\frac{E - V_C(0)}{E - V_u(t)} = e^{\frac{t}{RC}}$$

$$E - V_C(0) = \left[E - V_u(t)\right] e^{\frac{t}{RC}}$$

$$E - V_u(t) = \frac{E - V_C(0)}{e^{t/RC}} = \left[E - V_C(0)\right] e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$E - V_u(t) = E e^{-\frac{t}{RC}} - V_C(0)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_u(t) = E - E e^{-\frac{t}{RC}} + V_C(0)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + V_C(0)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$