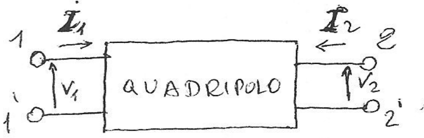
Prof. [illegible]

QUADRIPOLI

Un quadripolo è una rete elettrica attiva o passiva dotata di 4 terminali, 2 d'ingresso e 2 d'uscita (fig. 1)



La rete quadripolare è accessibile dall'esterno soltanto attraverso i quattro terminali, che consentono di descrivere le caratteristiche funzionali mediante due tensioni, V_1 e V_2 e due correnti, I_1 e I_2, <u>indipendentemente</u> dalla struttura circuitale interna.

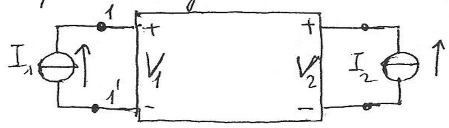
Molti dispositivi elettronici passivi o attivi possono essere comodamente schematizzati come quadripoli, per esempio i filtri passivi e quelli attivi, che consentono la trasmissione di segnali elettrici entro una certa banda di frequenza (banda passante), impedendo il passaggio dei segnali elettrici al di fuori di detta banda. Altro esempio di dispositivo schematizzabile mediante un quadripolo attivo è il transistore (BJT o MOSFET), il cui funzionamento viene descritto mediante i parametri caratteristici, misurabili in laboratorio.

Date le 4 grandezze elettriche V_1, V_2, I_1, I_2, è possibile sceglierne 2 a piacere come variabili indipendenti e determinare le altre due in funzione di esse. Le grandezze scelte come variabili indipendenti rappresentano le eccitazioni, le altre due (variabili dipendenti) rappresentano le risposte.

Un quadripolo, a seconda delle coppie di grandezze scelte come variabili indipendenti (eccitazioni), può essere rappresentato con 6 modelli matematici diversi: 2

1) modello a parametri Z (impedenze d'ingresso, d'uscita e di trasferimento)

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$



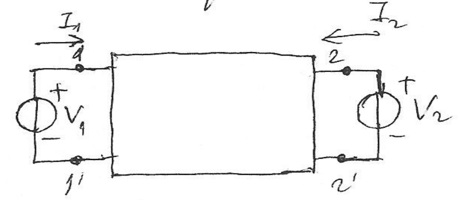
eccitazioni: I_1, I_2

Z_{11}, Z_{22}: impedenze d'ingresso e d'uscita a circuito aperto

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} \quad \underbrace{Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} \quad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}}_{\text{impedenze di trasferimento (transimpedenze)}} \quad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0}$$

2) Modello a parametri Y (ammettenze d'ingresso, d'uscita e di trasferimento)

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases}$$



eccitazioni: V_1, V_2

(Si impiega alle alte frequenze, in quanto i parametri Y vengono misurati comodamente in condizioni di cortocircuito, rendendo trascurabile l'effetto delle capacità parassite)

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0} \qquad Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0}$$ transammettenza o ammettenza di trasferimento

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0} \qquad Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}$$

transammettenza di trasferimento

Y_{11}, Y_{22}: ammettenze d'ingresso e d'uscita in condizioni di cortocircuito.

3) Modello a parametri ibridi h (non hanno le stesse dimensioni fisiche)

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

$h_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{V_2=0}$ (Ω) impedenza d'ingresso con uscita in cortocircuito

$h_{21} = \frac{I_2}{I_1}\Big|_{V_2=0}$ (numero puro, adimensionale) guadagno diretto di corrente con uscita in cortocircuito

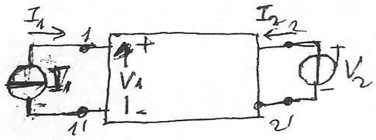
eccitazioni: I_1, V_2

Si impiega alle basse frequenze per modellizzare il transistore BJT

$h_{12} = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_1=0}$ guadagno inverso di tensione con ingresso a vuoto (numero puro)

$h_{22} = \frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}$ ammettenza d'uscita con ingresso a vuoto

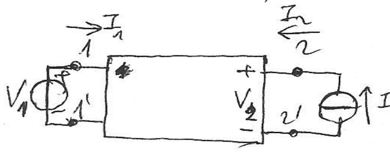
(S)



4) Modello a parametri ibridi inversi (g)

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

eccitazioni: V_1, I_2



$g_{11} = \frac{I_1}{V_1}\Big|_{I_2=0}$ ammettenza d'ingresso con uscita a vuoto (S)

$g_{12} = \frac{I_1}{I_2}\Big|_{V_1=0}$ guadagno inverso di corrente con ingresso in cortocircuito

(adimensionale)

$g_{21} = \frac{V_2}{V_1}\Big|_{I_2=0}$ guadagno diretto di tensione con uscita a vuoto.

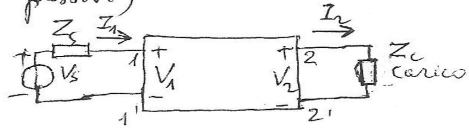
(adimensionale)

$g_{22} = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{V_1=0}$ impedenza d'uscita con ingresso in cortocircuito.

(Ω)

5) Modello a parametri generali A, B, C, D (usato per quadripolo passivi)

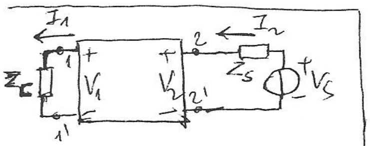
$$\begin{cases} V_1 = A V_2 + B I_2 \\ I_1 = C V_2 + D I_2 \end{cases}$$



variabili indipendenti: V_2, I_2

$a_{11} = A = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$ guadagno inverso di tensione con uscita a vuoto

$a_{12} = B = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{V_2=0}$ transresistenza con uscita in cortocircuito



$a_{21} = C = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$ transammettenza con uscita a vuoto

$a_{22} = D = \frac{I_1}{I_2}\Big|_{V_2=0}$ guadagno inverso di corrente con uscita in cortocircuito

6) Modello a parametri generali inversi (usato per quadripolo passivi)

$$\begin{cases} V_2 = V_1 \frac{D}{\Delta} - \frac{B}{\Delta} I_1 \\ I_2 = -\frac{C}{\Delta} V_1 + \frac{A}{\Delta} I_1 \end{cases}$$

$\Delta = AD - BC$

$b_{11} = \frac{D}{\Delta} = \frac{V_2}{V_1}\Big|_{I_1=0}$ $\quad b_{12} = -\frac{B}{\Delta} = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{V_1=0}$

$b_{21} = -\frac{C}{\Delta} = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{I_1=0}$ $\quad b_{22} = \frac{A}{\Delta} = \frac{I_2}{I_1}\Big|_{V_1=0}$

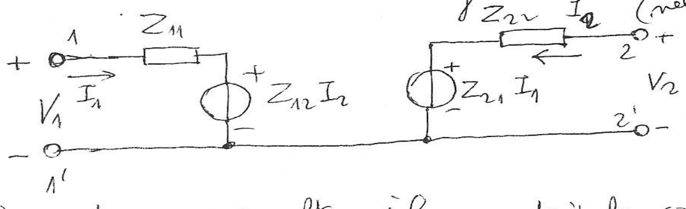
Struttura a T di un quadripolo generico

Consideriamo un quadripolo generico modellizzato con i parametri Z ed otteniamo il relativo schema elettrico equivalente interpretando opportunamente le equazioni

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

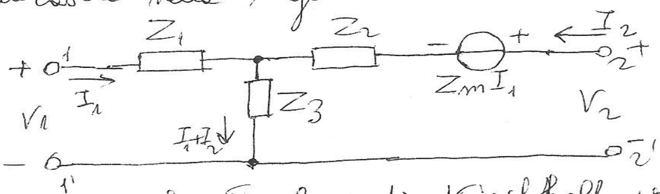
$Z_{12} I_2$ → generatore di tensione controllato da I_2 (nella maglia d'ingresso)

$Z_{21} I_1$ → generatore di tensione controllato da I_1 (nella maglia d'uscita)



Come si nota facilmente, il sistema precedente si ottiene applicando la II legge di Kirchhoff

Consideriamo inoltre il quadripolo con struttura a T ad esso equivalente e contenente un solo generatore nella maglia d'uscita:



Scriviamo la II legge di Kirchhoff per le due maglie del quadripolo a T e confrontiamo termine a termine con il sistema precedente.

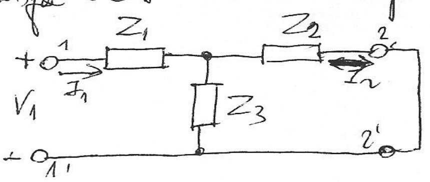
$$\begin{cases} V_1 = Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 + I_2) \\ V_2 = Z_2 I_2 + Z_m I_1 + Z_3 (I_1 + I_2) \end{cases}$$

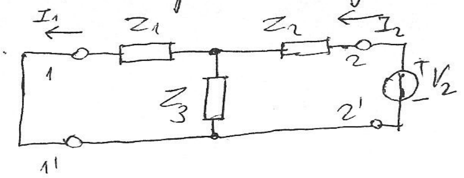
$$\begin{cases} V_1 = (Z_1 + Z_3) I_1 + Z_3 I_2 \\ V_2 = (Z_m + Z_3) I_1 + (Z_2 + Z_3) I_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z_1 + Z_3 = Z_{11} \\ Z_3 = Z_{12} \\ Z_m + Z_3 = Z_{21} \\ Z_2 + Z_3 = Z_{22} \end{cases}$$

Si ottiene infine: $Z_1 = Z_{11} - Z_3 = Z_{11} - Z_{12}$

$Z_3 = Z_{12}$ $\quad Z_2 = Z_{22} - Z_3 = Z_{22} - Z_{12}$ $\quad Z_m = Z_{21} - Z_3 = Z_{21} - Z_{12}$

Se in particolare $Z_{21}=Z_{12}$, $Z_m=0$ ed il quadripolo soddisfa al teorema di reciprocità valido per le reti passive.





$$I_2 = \frac{V_1}{Z_1+\frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}}\cdot\frac{Z_3}{Z_2+Z_3} = \frac{V_1 Z_3}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}$$

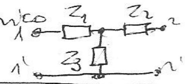
$$I_1 = \frac{V_2}{Z_2+\frac{Z_1Z_3}{Z_1+Z_3}}\cdot\frac{Z_3}{Z_1+Z_3} = \frac{V_2 Z_3}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3}$$

Se un quadripolo è reciproco si ha:

$$\boxed{\frac{I_2}{V_1}=\frac{I_1}{V_2}}$$

N.B.: Qualsiasi quadripolo può essere schematizzato con un quadripolo a T, indipendentemente dalla complessità della struttura interna della rete.

Se infine $Z_1=Z_2$, il quadripolo è simmetrico



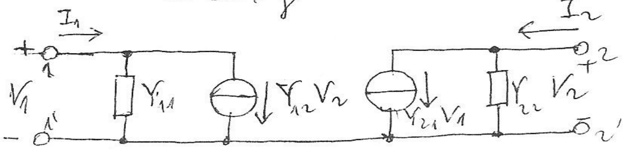
Struttura a Π di un quadripolo generico

Consideriamo un quadripolo generico modellizzato con i parametri Y ed otteniamo il relativo schema elettrico equivalente interpretando opportunamente le equazioni

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

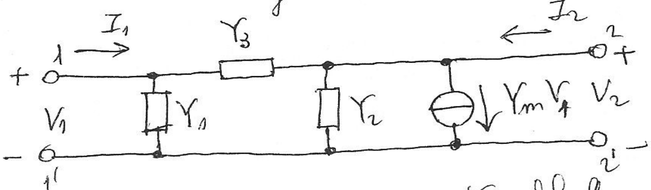
$Y_{12}V_2$ → generatore di corrente controllato da V_2

$Y_{21}V_1$ → generatore di corrente controllato da V_1



Come si può notare, il sistema precedente si ottiene applicando ai 2 nodi la I legge di Kirchhoff.

Consideriamo inoltre il quadripolo equivalente con struttura a Π e contenente un solo generatore nel nodo d'uscita (generatore di corrente controllato da V_1)



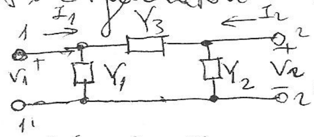
Scriviamo la I legge di Kirchhoff per i 2 nodi del quadripolo a Π e confrontiamo termine a termine con il sistema precedente,

$$\begin{cases} I_1 = Y_1 V_1 + Y_3 (V_1 - V_2) \\ I_2 = Y_2 V_2 + Y_m V_1 + Y_3 (V_2 - V_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = (Y_1 + Y_3) V_1 - Y_3 V_2 \\ I_2 = (Y_m - Y_3) V_1 + (Y_2 + Y_3) V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{11} = Y_1 + Y_3 \quad , \quad Y_{12} = -Y_3 \\ Y_{21} = Y_m - Y_3 \quad , \quad Y_{22} = Y_2 + Y_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_1 = Y_{11} + Y_{12} \\ Y_2 = Y_{22} + Y_{12} \\ Y_m = Y_{21} - Y_{12} \\ Y_3 = -Y_{12} \end{cases}$$

Se $Y_{21} = Y_{12}$ il quadripolo è reciproco, in quanto non contiene il generatore controllato $Y_m V_1$.

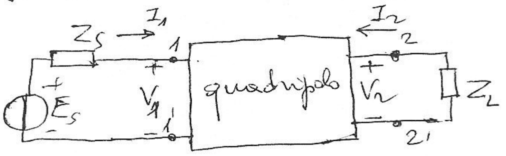


Se inoltre $Y_1 = Y_2$, il quadripolo è simmetrico.

N.B.: Un quadripolo qualsiasi può essere schematizzato con un quadripolo a Π, indipendentemente dalla complessità della struttura interna della rete.

Impedenza d'ingresso di un quadripolo

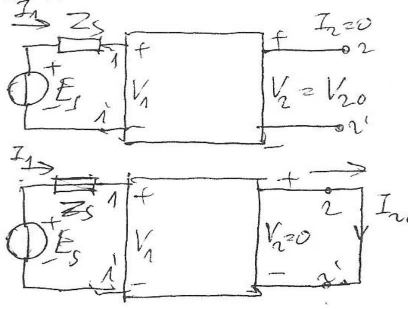
Consideriamo un generico quadripolo, attivo o passivo, collegato con i morsetti d'ingresso 1,1' ad un generatore reale di tensione con impedenza Z_s e f.e.m. E_s e con i morsetti d'uscita 2,2' ad un carico avente impedenza Z_L.

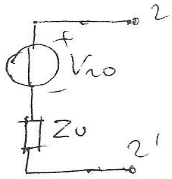


Si definisce impedenza d'ingresso Z_i il rapporto tra la tensione V_1 tra i morsetti d'ingresso e la corrente I_1 assorbita dal circuito (porta) d'ingresso, per un determinato valore dell'impedenza di carico Z_L; pertanto l'impedenza d'ingresso $Z_i = \dfrac{V_1}{I_1}$ dipende dal carico Z_L.

Impedenza d'uscita di un quadripolo

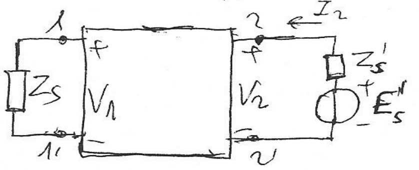
Si suppone di staccare il carico Z_L e di misurare la tensione a vuoto V_{20} e la corrente di cortocircuito I_{2cc}. Per il teorema di Thevenin l'impedenza d'uscita Z_U si ottiene dal rapporto $\dfrac{V_{20}}{I_{2cc}}$.





$$Z_U = \frac{V_{20}}{I_{2cc}}$$ dipende dall'impedenza Z_s del generatore E_s

In alternativa, si può determinare l'impedenza d'uscita Z_U del generatore equivalente di Thevenin, collegato ai morsetti 2,2' del quadripolo, collegando ai morsetti d'ingresso 1,1' l'impedenza Z_S pari all'impedenza interna del generatore E_S ed affiancando ai morsetti d'uscita 2,2' una generatore reale di tensione E_S'. L'impedenza d'uscita Z_U si calcola secondo il rapporto tra la tensione V_2 e la corrente I_2 erogata dal generatore E_S'

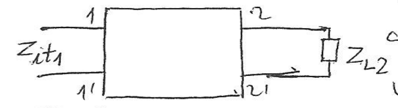


$$Z_U = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{E_S=0}$$

il generatore E_S viene sostituito ed al suo posto si collega un elemento Z_S uguale alla sua impedenza interna.

L'impedenza d'uscita dipende dal valore di Z_S (impedenza interna del generatore collegato all'ingresso)

Impedenza iterativa di un quadripolo ed Impedenza caratteristica di un quadripolo simmetrico

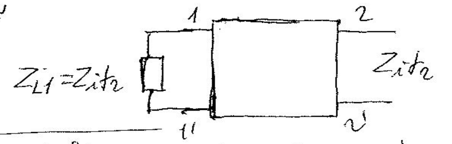


Dato un quadripolo generico connesso dal lato 2 ad un carico Z_{L2}, esiste un particolare valore Z_{it1} di Z_{L2} tale che l'impedenza

$Z_{it1}=Z_{L2}$

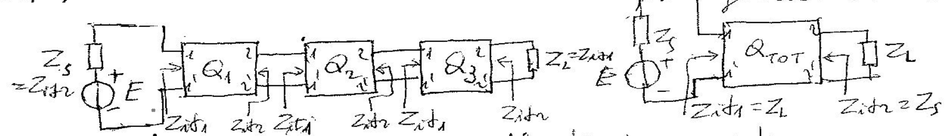
misurata ai morsetti 1,1' d'ingresso sia uguale a Z_{it1}; questo particolare valore prende il nome di impedenza iterativa dal lato 1, in quanto, se si collegano in cascata 2 o più quadripoli identici, di cui l'ultimo avente come carico $Z_{L2}=Z_{it1}$ ai morsetti 2,2', ogni quadripolo vede come carico Z_{it1} e così anche l'impedenza d'ingresso del

primo quadripolo risulta uguale a Z_{it1}.
Analogamente, collegando ai morsetti 1,1' un carico Z_{L1}, esiste un particolare valore Z_{it2} di Z_{L1} tale che l'impedenza misurata ai morsetti 2,2' sia pari a Z_{it2}. Questo particolare valore prende il nome di <u>impedenza iterativa del lato 2</u>.



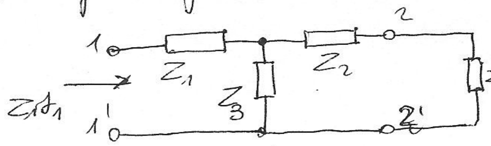
Pertanto si definisce impedenza iterativa di un quadripolo quel particolare valore dell'impedenza di carico che, connessa ad una coppia di terminali, determina un'impedenza d'ingresso uguale in corrispondenza dell'altra coppia di terminali.

Adattamento sulle impedenze iterative (Non si ottiene il massimo trasferimento di potenza dal generatore al carico)



Dati due o più quadripoli collegati in cascata e caratterizzati dagli stessi valori di Z_{it1} e Z_{it2}, se $Z_L = Z_{it1}$, si può sostituire ad essi un unico quadripolo avente come carico $Z_L = Z_{it1}$ e come impedenza del generatore $Z_S = Z_{it2}$. Infatti il quadripolo Q_3, essendo caricato da $Z_L = Z_{it1}$, caricherà con Z_{it1} il quadripolo Q_2, il quale, essendo caricato da Z_{it1}, caricherà Q_1 con Z_{it1}, ed infine Q_1 caricherà il generatore con Z_{it1}. Analogamente, se $Z_S = Z_{it2}$, l'impedenza di ogni quadripolo ai morsetti 2,2' coinciderà con Z_{it2} ed infine Q_3 avrà un'impedenza d'uscita pari a Z_{it2}.

Se per semplicità consideriamo un quadripolo a T asimmetrico ($Z_1 \neq Z_2$), il calcolo delle impedenze iterative si effettua nel modo seguente:



Si impone che l'impedenza d'ingresso ai morsetti 1,1', con il quadripolo caricato da Z_{it1}, sia pari a Z_{it1}:

$$Z_{it1} = Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_{it1})}{Z_2 + Z_3 + Z_{it1}} \quad , \text{cioè} \quad Z_{it1} = Z_1 + Z_3 // (Z_2 + Z_{it1})$$

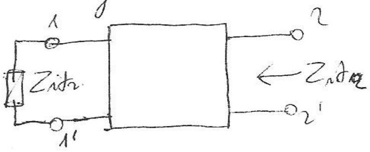
$$Z_{it1} Z_2 + \cancel{Z_{it1} Z_3} + Z_{it1}^2 = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_{it1} + Z_2 Z_3 + \cancel{Z_3 Z_{it1}}$$

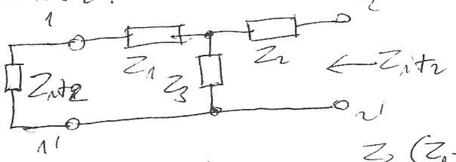
$$Z_{it1}^2 + (Z_2 - Z_1) Z_{it1} - Z_1 Z_2 - Z_1 Z_3 - Z_2 Z_3 = 0$$

$$Z_{it1} = -\frac{(Z_2 - Z_1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(Z_2 - Z_1)^2}{4} + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} =$$

$$= \frac{Z_1 - Z_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(Z_1 - Z_2)^2}{4} + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3}$$

Analogamente si ottiene Z_{it2}:





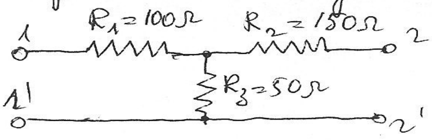
$$Z_{it2} = Z_2 + Z_3 // (Z_1 + Z_{it2}) = Z_2 + \frac{Z_3 (Z_1 + Z_{it2})}{Z_3 + Z_1 + Z_{it2}}$$

$$\cancel{Z_{it2} Z_3} + Z_{it2} Z_1 + Z_{it2}^2 = Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_{it2} Z_2 + Z_1 Z_3 + \cancel{Z_3 Z_{it2}}$$

$$Z_{it2}^2 + (Z_1 - Z_2) Z_{it2} - Z_2 Z_3 - Z_1 Z_2 - Z_1 Z_3 = 0$$

$$Z_{it2} = \frac{Z_2 - Z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(Z_1 - Z_2)^2}{4} + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3}$$

Esercizio: Calcolare le impedenze iterative del quadripolo a T disegnato in figura.



Le impedenze iterative si riducono a resistenze

$$Z_{it1} = \frac{R_1 - R_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(R_1-R_2)^2}{4} + R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3} =$$

$$= \frac{100-150}{2} \pm \sqrt{\frac{2500}{4} + 5000 + 15000 + 7500} =$$

$$= -25 \pm \sqrt{2{,}8125 \cdot 10^4} = -25 \pm 167{,}7 \quad \begin{cases} 142{,}7\,\Omega \\ \cancel{-192{,}7\,\Omega} \end{cases}$$

~~soluzione non significativa~~

$$Z_{it2} = \frac{R_2 - R_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(R_1-R_2)^2}{4} + R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3} =$$

$$= 25 \pm 167{,}7 \quad \begin{cases} 192{,}7\,\Omega \\ \cancel{-142{,}7\,\Omega} \end{cases}$$

~~soluzione non significativa~~

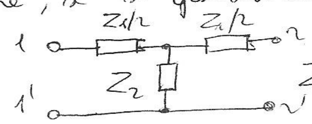
$$Z_{it1} = 142{,}7\,\Omega \qquad Z_{it2} = 192{,}7\,\Omega$$

Se in particolare il quadripolo è simmetrico, si ha:

$$Z_0 = Z_{it1} = Z_{it2} = \sqrt{Z_1Z_3 + Z_1^2 + Z_1Z_3} = \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1Z_3} = \sqrt{2\left(Z_1Z_3 + \frac{Z_1^2}{2}\right)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{Z_1Z_3 + \frac{Z_1^2}{2}}$$

$(Z_1 = Z_2)$ L'impedenza iterativa in questo caso prende il nome di impedenza caratteristica (Z_0) seguente

Oppure, se si considera la struttura a T simmetrica, si ha:

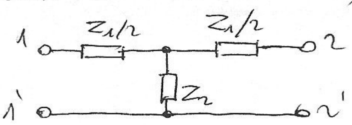


$$Z_{0T} = Z_{it1} = Z_{it2} = \sqrt{\frac{Z_1}{2}Z_2 + \frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1}{2}Z_2}$$

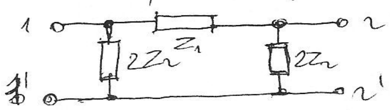
impedenze iterative

$$Z_{0T} = \sqrt{Z_1Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}$$ ← impedenza caratteristica

Data la rete a T simmetrica, con impedenza serie pari complessivamente a $\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_1}{2}=Z_1$ ed impedenza parallelo pari a Z_2, è possibile



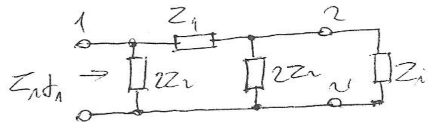
disegnare immediatamente la struttura simmetrica a Π ad essa correlata, caratterizzata cioè dagli stessi valori delle impedenze serie e parallelo..

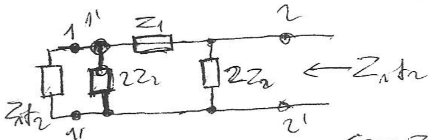


Infatti $2Z_2 // 2Z_2 = Z_2$ e $Z_1 = \frac{Z_1}{2}+\frac{Z_1}{2}$.

Analogamente, possiamo ottenere le impedenze iterative Z_{it1} e Z_{it2} per la struttura a Π simmetrica, ~~secondo~~ quanto segue (Le impedenze Z_{it1} e Z_{it2} coincidono in questo caso con $Z_{0\Pi}$, essendo il quadripolo simmetrico)

$$Z_{it1} = 2Z_2 // \left(Z_1 + 2Z_2 // Z_{it1}\right)$$





$$Z_{it1} = 2Z_2 // \left(Z_1 + \frac{2Z_2 Z_{it1}}{2Z_2 + Z_{it1}}\right) =$$

$$= \frac{2Z_2\left(Z_1 + \frac{2Z_2 Z_{it1}}{2Z_2+Z_{it1}}\right)}{2Z_2 + Z_1 + \frac{2Z_2 Z_{it1}}{2Z_2+Z_{it1}}} =$$

$$= \frac{2Z_2\left(\frac{2Z_1Z_2 + Z_1Z_{it1} + 2Z_2Z_{it1}}{\cancel{2Z_2+Z_{it1}}}\right)}{\frac{4Z_2^2 + 2Z_2Z_{it1} + 2Z_1Z_2 + Z_1Z_{it1} + 2Z_2Z_{it1}}{\cancel{2Z_2+Z_{it1}}}} =$$

$$Z_{it1} = \frac{4Z_1Z_2^2 + 2Z_1Z_2Z_{it1} + 4Z_2^2Z_{it1}}{4Z_2^2 + 2Z_2Z_{it1} + 2Z_1Z_2 + Z_1Z_{it1} + 2Z_2Z_{it1}}$$

$$\cancel{4Z_{it_1}Z_2^2} + 2Z_2Z_{it_1}^2 + \cancel{2Z_1Z_2Z_{it_1}} + Z_1Z_{it_1}^2 + 2Z_2Z_{it_1}^2 =$$

$$= 4Z_1Z_2^2 + \cancel{2Z_1Z_2Z_{it_1}} + \cancel{4Z_2^2Z_{it_1}}$$

$$4Z_2Z_{it_1}^2 + Z_1Z_{it_1}^2 = 4Z_1Z_2^2$$

$$Z_{it_1}^2\,(4Z_2+Z_1) = 4Z_1Z_2^2 \qquad Z_{it_1}^2 = \frac{4Z_1Z_2^2}{4Z_2+Z_1} =$$

$$= \frac{4Z_1^2Z_2^2}{4Z_1Z_2+Z_1^2} \qquad Z_{it_1} = \frac{2Z_1Z_2}{\sqrt{4Z_1Z_2+Z_1^2}} = \frac{Z_1Z_2}{\frac{1}{2}\sqrt{4Z_1Z_2+Z_1^2}}$$

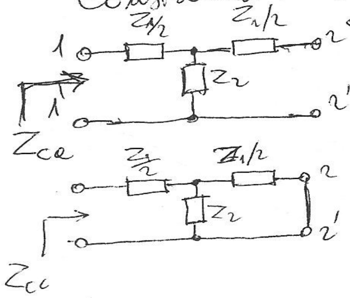
$$Z_{it_1} = \frac{Z_1Z_2}{\sqrt{Z_1Z_2+\frac{Z_1^2}{4}}} \qquad Z_{it_2} = Z_{it_1} = Z_{0\pi}$$

impedenza caratteristica

Confrontando questa espressione con l'espressione dell'impedenza caratteristica della struttura a T simmetrica $Z_{0T} = \sqrt{Z_1Z_2+\frac{Z_1^2}{4}}$, si nota che il prodotto si mantiene costante $\boxed{Z_{0T}\cdot Z_{0\pi} = Z_1Z_2}$ per i due quadripoli simmetrici correlati (a T e a π).

Calcolo dell'impedenza caratteristica mediante le impedenze d'ingresso con uscita a vuoto Z_{ca} (circuito aperto ca) e con uscita in cortocircuito Z_{cc}

Consideriamo la struttura a T simmetrica nelle due condizioni citate:



$$Z_{ca} = \frac{Z_1}{2} + Z_2$$

$$Z_{cc} = \frac{Z_1}{2} + \left(\frac{Z_1}{2} /\!/ Z_2\right) = \frac{Z_1}{2} + \frac{\frac{Z_1Z_2}{2}}{\frac{Z_1}{2}+Z_2} =$$

$$= \frac{\frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1Z_2}{2} + \frac{Z_1Z_2}{2}}{\frac{Z_1}{2}+Z_2} = \frac{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1Z_2}{\frac{Z_1}{2}+Z_2}$$

Moltiplicando $Z_{ca} \cdot Z_{cc}$ si ottiene l'espressione

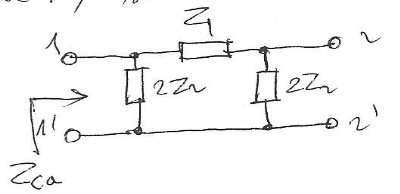
$$Z_{ca}Z_{cc} = \cancel{\left(\frac{Z_1}{2}+Z_2\right)} \cdot \frac{\frac{Z_1^2}{4}+Z_1Z_2}{\cancel{\frac{Z_1}{2}+Z_2}} = \frac{Z_1^2}{4} + Z_1Z_2 = Z_{0T}^2$$

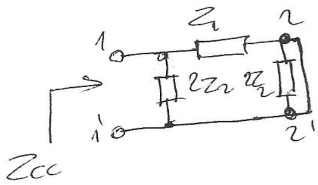
che coincide con il quadrato di Z_{0T}. Pertanto si ha:

$$Z_{0T} = \sqrt{Z_{ca}Z_{cc}}\,.$$

L'impedenza caratteristica di un quadripolo simmetrico si può pertanto ottenere dall'espressione $\sqrt{Z_{ca}Z_{cc}}$ considerando le impedenze d'ingresso del quadripolo con uscita a vuoto e con uscita in cortocircuito.

Analogamente, considerando le impedenze d'ingresso Z_{ca} e Z_{cc} del quadripolo simmetrico a Π correlato al quadripolo a T, si ottiene:





$$Z_{ca} = 2Z_2 /\!/ (Z_1+2Z_2) = \frac{2Z_2(Z_1+2Z_2)}{2Z_2+Z_1+2Z_2} = \frac{2Z_2(Z_1+2Z_2)}{Z_1+4Z_2}$$

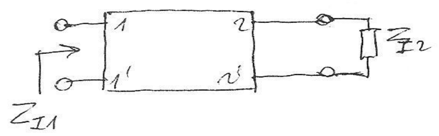
$$Z_{cc} = Z_1 /\!/ 2Z_2 = \frac{2Z_1Z_2}{Z_1+2Z_2}$$

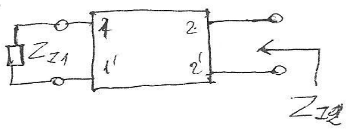
$$Z_{0\Pi} = \sqrt{Z_{ca}Z_{cc}} = \sqrt{\frac{2Z_2\cancel{(Z_1+2Z_2)}}{Z_1+4Z_2}\cdot\frac{2Z_1Z_2}{\cancel{Z_1+2Z_2}}} = \sqrt{\frac{4Z_1Z_2^2}{Z_1+4Z_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4Z_1^2Z_2^2}{Z_1^2+4Z_1Z_2}} = Z_1Z_2\sqrt{\frac{1}{\frac{Z_1^2}{4}+Z_1Z_2}} = \frac{Z_1Z_2}{\sqrt{\frac{Z_1^2}{4}+Z_1Z_2}}\,.$$

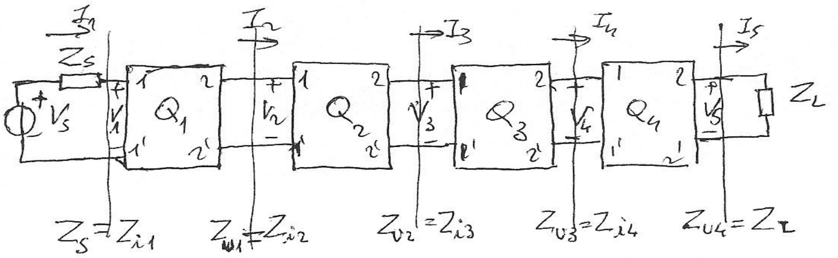
Impedenze immagini di un quadripolo asimmetrico

Mentre nel caso di più quadripoli simmetrici collegati in cascata, l'adattamento di impedenza tra generatore e carico si ottiene collegando all'uscita dell'ultimo quadripolo della catena un carico $Z_L = Z_0$ (impedenza caratteristica di ciascun quadripolo) ed all'ingresso del primo quadripolo un generatore con impedenza interna $Z_S = Z_0$, al fine di realizzare il massimo trasferimento di potenza tra generatore e carico, nel caso di più quadripoli asimmetrici collegati in cascata, l'adattamento si può ottenere con il metodo delle impedenze immagini.
Si definiscono impedenze immagini di un quadripolo asimmetrico le impedenze Z_{I1} e Z_{I2} tali che, se il quadripolo è chiuso dal lato 2 su Z_{I2}, l'impedenza misurata dal lato 1 è pari a Z_{I1} e se invece è chiuso dal lato 1 su Z_{I1}, l'impedenza misurata dal lato 2 è pari a Z_{I2}:



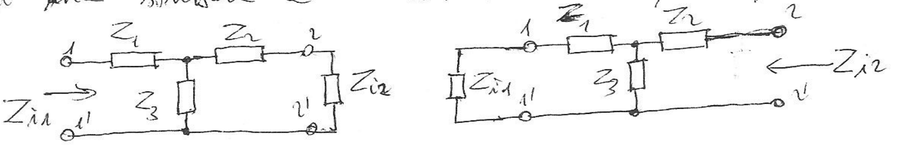


Se consideriamo più quadripoli asimmetrici collegati in cascata, l'adattamento di impedenza tra generatore e carico si ottiene facendo in modo che in corrispondenza del collegamento tra l'uscita di un quadripolo e l'ingresso del successivo si veda la stessa impedenza da ambo le parti della connessione:



In particolare l'impedenza d'ingresso di Q_1 deve uguagliare l'impedenza del generatore e l'impedenza d'uscita di Q_4 deve uguagliare l'impedenza di carico; in tal modo la cascata di quadripoli equivale ad un unico quadripolo avente Z_S e Z_L come valori delle impedenze immagini

A titolo di esempio calcoliamo le impedenze immagini di una struttura a T asimmetrica (quadripolo a T)



Z_{i1} e Z_{i2} devono soddisfare il seguente sistema, scritto in base alla definizione di impedenze immagini

$$\begin{cases} Z_{i1} = \left[(Z_2+Z_{i2}) /\!/ Z_3\right] + Z_1 \\ Z_{i2} = \left[(Z_1+Z_{i1}) /\!/ Z_3\right] + Z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z_{i1} = \dfrac{(Z_2+Z_{i2})Z_3}{Z_2+Z_{i2}+Z_3} + Z_1 \\ Z_{i2} = \dfrac{(Z_1+Z_{i1})Z_3}{Z_1+Z_{i1}+Z_3} + Z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{i1}Z_2 + Z_{i1}Z_{i2} + Z_{i1}Z_3 = Z_2Z_3 + Z_{i2}Z_3 + Z_1Z_2 + Z_1Z_{i2} + Z_1Z_3 & 1) \\ Z_{i2}Z_1 + Z_{i1}Z_{i2} + Z_{i2}Z_3 = Z_1Z_3 + Z_{i1}Z_3 + Z_1Z_2 + Z_{i1}Z_2 + Z_2Z_3 & 2) \end{cases}$$

Sottraendo la 2) dalla 1) si ha: $Z_{i1}(Z_2+Z_3) = Z_{i2}(Z_1+Z_3)$

$$Z_{i2} = Z_{i1}\frac{(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_3}$$

Sostituendo nella 2) si ha:

$$Z_{i1}\frac{(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_3}\cdot Z_1 + Z_{i1}^2\frac{(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_3} + Z_{i1}\frac{(Z_2+Z_3)Z_3}{Z_1+Z_3} =$$

$$= Z_1Z_3 + Z_{i1}Z_3 + Z_1Z_2 + Z_{i1}Z_2 + Z_2Z_3;$$

$$Z_{i1}Z_1(Z_2+Z_3) + Z_{i1}^2(Z_2+Z_3) + Z_{i1}Z_3(Z_2+Z_3) = Z_1^2Z_3 + Z_1Z_3Z_{i1} +$$

$$+ Z_1^2Z_2 + Z_1Z_2Z_{i1} + Z_1Z_2Z_3 + Z_1Z_3^2 + Z_{i1}Z_3^2 + Z_1Z_2Z_3 + Z_{i1}Z_2Z_3 + Z_2Z_3^2$$

$$Z_{i1}^2(Z_2+Z_3) + Z_{i1}(\cancel{Z_1Z_2} + \cancel{Z_1Z_3} + \cancel{Z_2Z_3} + \cancel{Z_3^2} - \cancel{Z_1Z_2} - \cancel{Z_3^2} - \cancel{Z_2Z_3} - \cancel{Z_1Z_3}) +$$

$$- Z_1^2Z_3 - Z_1^2Z_2 - Z_1Z_3^2 - Z_1Z_2Z_3 - Z_2Z_3^2 - Z_1Z_2Z_3 = 0$$

$$Z_{i1}^2(Z_2+Z_3) = Z_1Z_3(Z_1+Z_3) + Z_1Z_2(Z_1+Z_3) + Z_2Z_3(Z_1+Z_3)$$

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{(Z_1+Z_3)(Z_1Z_3+Z_1Z_2+Z_2Z_3)}{Z_2+Z_3}}$$

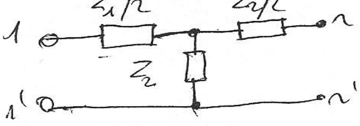
$$Z_{i2} = Z_{i1}\frac{(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_3} = \sqrt{\frac{\cancel{(Z_1+Z_3)}(Z_1Z_3+Z_1Z_2+Z_2Z_3)(Z_2+Z_3)^2}{(Z_1+Z_3)^{\cancel{2}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(Z_2+Z_3)(Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3)}{Z_1+Z_3}}$$

Si può verificare facilmente che le impedenze immagini Z_{i1} e Z_{i2} si possono ottenere considerando rispettivamente le impedenze d'ingresso Z_{ca1}, con uscita a vuoto, e Z_{cc1} con uscita in cortocircuito per il lato 1 e Z_{ca2} e Z_{cc2} per il lato 2

$Z_{i1} = \sqrt{Z_{ca1} Z_{cc1}} \qquad Z_{i2} = \sqrt{Z_{ca2} Z_{cc2}}$

Se la rete a T è simmetrica si ha:



$$Z_{I1} = Z_{I2} = \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1 Z_2}{2} + \frac{Z_1 Z_2}{2}} =$$

$$= \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}$$

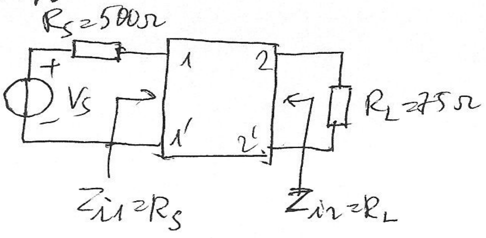
Si ottengono pertanto i valori coincidenti con l'impedenza iterativa del quadripolo, che è pari all'impedenza caratteristica Z_0.

Se un quadripolo è simmetrico i valori delle impedenze immagini e dell'impedenza iterativa coincidono con l'impedenza caratteristica del quadripolo.

Esempio di adattamento tra generatore e carico con il metodo delle impedenze immagini.

Supponiamo di dover collegare un generatore $\dot{V}_S$ con resistenza interna $R_S = 500\Omega$ ad un carico resistivo R_L da 75Ω attraverso un quadripolo adattatore non dissipativo, costituito cioè da induttori e condensatori soltanto, al fine di ottenere il massimo trasferimento di potenza tra generatore e carico.

Poiché il massimo trasferimento di potenza si ottiene quando il generatore è chiuso su un carico pari alla sua resistenza interna occorre dimensionare un quadripolo adattatore che presenti dal lato del generatore una resistenza d'ingresso di 500 Ω e dal lato del carico ~~una~~ resistenza d'uscita di 75 Ω



Coefficiente di trasduzione di un quadripolo asimmetrico chiuso sulle impedenze immagini.

Si definisce coefficiente di trasduzione (o di trasferimento) immagine di un quadripolo asimmetrico passivo, il logaritmo neperiano $\gamma_i = \alpha_i + j\beta_i$ (complesso) della radice quadrata del rapporto tra la potenza P_1 all'ingresso del quadripolo e la potenza P_2 resa al carico

$$\gamma_i = \ln\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\overline{V}_1\overline{I}_1}{\overline{V}_2\overline{I}_2},$$

dove $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{I}_1, \overline{I}_2$ sono segnali sinusoidali

La parte reale di γ_i esprime in neper $(1\,Np = 8{,}69\,dB)$ il rapporto tra P_1 e P_2.

Tenendo conto che in un quadripolo chiuso sulle impedenze immagini $\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1} = \overline{Z}_{i1}$ è diverso da $\frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2} = Z_{i2}$, si ricava che il rapporto tra $\overline{V}_1$ e $\overline{V}_2$ (attenuazione di tensione) è diverso dal rapporto tra $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ (attenuazione di corrente); pertanto, a differenza di quanto si verifica in ~~un~~ quadripolo chiuso sull'impedenza iterativa $\left(\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1} = \frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2}\right)$ $\left(\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2} = \frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_2}\right)$, l'attenuazione di potenza non coincide con le attenuazioni di tensione e di corrente.

γ si può esprimere anche in funzione di $\bar{I}_1, \bar{I}_2, Z_{i1}$ e Z_{i2}, oppure in funzione di $\bar{V}_1, \bar{V}_2, Z_{i1}, Z_{i2}$.

$$\gamma = \ln\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \ln\sqrt{\frac{\bar{V}_1\bar{I}_1}{\bar{V}_2\bar{I}_2}} = \ln\sqrt{\frac{I_1^2 Z_{i1}}{I_2^2 Z_{i2}}} = \ln\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\sqrt{\frac{Z_{i1}}{Z_{i2}}} =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{V_1^2/Z_{i1}}{V_2^2/Z_{i2}}} = \ln\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\sqrt{\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}}} \qquad \underset{\substack{\text{parte reale}\\\text{(in nepers)}}}{\alpha_i} = \ln\left|\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\sqrt{\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}}}\right| = \ln\left|\sqrt{\frac{P_1}{P_2}}\right|$$

In un quadripolo simmetrico invece, essendo $Z_{i1} = Z_{i2} = Z_0 = Z_{it1} = Z_{it2}$ (impedenze iterative ed immagini coincidenti con l'impedenza caratteristica Z_0), si ha:

$$\underset{\text{(in Nepers)}}{\alpha_0} = \ln\left|\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right| = \ln\left|\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\right|,$$ cioè l'attenuazione di potenza $\alpha_i = \ln\left|\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\sqrt{\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}}}\right|$, essendo $Z_{i1} = Z_{i2}$, (espressa in nepers) coincide con la attenuazione di tensione e di corrente e $\gamma_0 = \ln\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \ln\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \alpha_0 + j\beta_0$.

β_0 rappresenta lo sfasamento tra $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$ e tra $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$.

$$\beta_0 = \arg\frac{V_1}{V_2} = \arg\frac{I_1}{I_2}$$ (β è espresso in radianti)

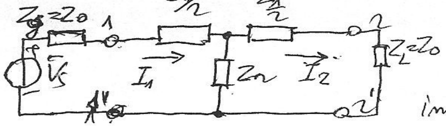
(argomento di $\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}$ e di $\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}$)

N.B.: In un quadripolo simmetrico chiuso su Z_0,

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = Z_0, \quad \text{pertanto} \quad \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = e^{\gamma_0},$$

cioè il rapporto tra le tensioni coincide con il rapporto tra le correnti

Esempio: Quadripolo simmetrico a T adattato su Z_0 ed alimentato da un generatore con $Z_g = Z_0$ $\quad (Z_L = Z_g = Z_0)$



$$Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}$$

impedenza caratteristica

Applicando la legge del partitore di corrente, si ha:

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + \frac{Z_1}{2} + Z_0} \qquad \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = e^{\gamma} = \frac{Z_2 + \frac{Z_1}{2} + Z_0}{Z_2} =$$

$$= \frac{Z_2 + \frac{Z_1}{2} + \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}}{Z_2}$$

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{e^{\gamma}} = \frac{Z_2}{Z_2 + \frac{Z_1}{2} + \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}} = \frac{Z_2 \left(Z_2 + \frac{Z_1}{2} - \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \right)}{\left(Z_2 + \frac{Z_1}{2} + \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \right)\left(Z_2 + \frac{Z_1}{2} - \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \right)} =$$

$$= \frac{Z_2 \left(Z_2 + \frac{Z_1}{2} - \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \right)}{\left(Z_2 + \frac{Z_1}{2} \right)^2 - Z_1 Z_2 - \frac{Z_1^2}{4}} = \frac{Z_2 \left(Z_2 + \frac{Z_1}{2} - \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \right)}{Z_2^2 + \cancel{\frac{Z_1^2}{4}} + \cancel{Z_1 Z_2} - \cancel{Z_1 Z_2} - \cancel{\frac{Z_1^2}{4}}} =$$

$$= \frac{Z_2 + \frac{Z_1}{2} - \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}}{Z_2}$$

È conveniente in molti casi ottenere il $\cosh \gamma$ (coseno iperbolico di γ) per facilitare il calcolo della banda passante del quadripolo (caso dei filtri)

$$\cosh = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{Z_2 + \frac{Z_1}{2} + \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}}{Z_2} + \frac{Z_2 + \frac{Z_1}{2} - \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}}{Z_2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2 Z_2 + Z_1}{Z_2} \right] = \left[1 + \frac{Z_1}{2 Z_2} \right]$$

$$\cosh \gamma = 1 + \frac{Z_1}{2 Z_2} \qquad \gamma = \alpha + j\beta$$

Proprietà delle funzioni iperboliche:

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

coseno iperbolico — seno iperbolico

definiti su un'iperbole equilatera avente semiassi unitari

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\begin{cases}\cosh 0 = 1\\ \sinh 0 = 0\end{cases}$$

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha \cosh\beta + \cosh\alpha \sinh\beta$$

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha \sinh\beta$$

$$\mathrm{tgh}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tgh}\,\alpha + \mathrm{tgh}\,\beta}{1+\mathrm{tgh}\,\alpha\,\mathrm{tgh}\,\beta}$$

Tenendo conto delle formule di Eulero, si ha:

$$\sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}, \qquad \cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

$$\sin jx = \frac{e^{j\cdot jx}-e^{-j\cdot jx}}{2j} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2j} = -j\frac{(e^{-x}-e^{x})}{2} = j\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = j\sinh x$$

$$\cos jx = \frac{e^{j\cdot jx}+e^{-j\cdot jx}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x$$

$$\cosh(\alpha+j\beta) = \cosh\alpha\cosh j\beta + \sinh\alpha \sinh j\beta$$

$$\cosh j\beta = \frac{e^{j\beta}+e^{-j\beta}}{2} = \cos\beta \qquad \sinh j\beta = \frac{e^{j\beta}-e^{-j\beta}}{2} =$$

$$= \frac{e^{j\beta}-e^{-j\beta}}{2} = j\,\frac{(e^{j\beta}-e^{-j\beta})}{2j} = j\frac{(e^{j\beta}-e^{-j\beta})}{2j} = j\sin\beta$$

$$\cosh(\alpha+j\beta) = \cosh\alpha\cos\beta + j\sinh\alpha\sin\beta$$

Infine si ottiene per $\cosh\gamma$:

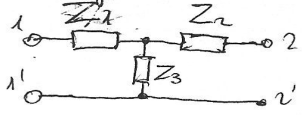
$$\cosh\alpha\cos\beta + j\sinh\alpha\sin\beta = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$$

espressione utile in molti calcoli sui quadripoli a T simmetrici

RELAZIONI FONDAMENTALI PER L'ANALISI E LA SINTESI DI QUADRIPOLI

1) Quadripoli asimmetrici

Con riferimento alla struttura a T asimmetrica si ha:



$$Z_{i1} = \sqrt{Z_{ca1} Z_{cc1}}$$

impedenza immagine dal lato 1

$$Z_{i2} = \sqrt{Z_{ca2} Z_{cc2}}$$

impedenza immagine dal lato 2

Z_{ca1}: impedenza ai morsetti 1,1' con uscita aperta (a vuoto)

Z_{cc1}: impedenza ai morsetti ~~1~~ 1,1' con uscita in cortocircuito.

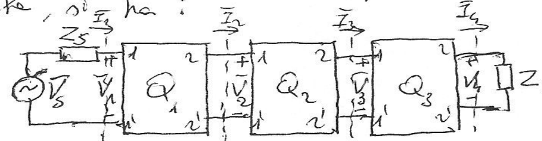
Z_{ca2}: impedenza ai morsetti 2,2' con uscita aperta

Z_{cc2}: impedenza ai morsetti 2,2' con uscita in cortocircuito.

Analogamente si procede per la struttura a π

Adattamento delle impedenze immagini per quadripoli asimmetrici in cascata per il migliore trasferimento di potenza fra generatore e carico

Considerando, per esempio, 3 quadripoli asimmetrici collegati in cascata, si ha:



$Z_S = Z_{i1}$ $\quad Z_{U1} = Z_{i2}$ $\quad Z_{U2} = Z_{i3}$ $\quad Z_{U3} = Z_L$

N.B.: il rapporto fra le tensioni è diverso dal rapporto fra le correnti

Q_1, Q_2, Q_3: quadripoli passivi

$\bar{V}_S = \hat{V}_S e^{j\omega t}$ (eccitazione sinusoidale)

Tagliando i collegamenti in corrispondenza delle linee tratteggiate si deve ~~tro~~ misurare la stessa impedenza a sinistra e a destra.

$$\frac{\bar{V}_1 \bar{I}_1}{\bar{V}_2 \bar{I}_2} = A_1 = e^{2\gamma_{1i}} \quad \text{attenuazione di } Q_1$$

$$\frac{\bar{V}_2 \bar{I}_2}{\bar{V}_3 \bar{I}_3} = A_2 = e^{2\gamma_{2i}} \quad \text{"} \quad \text{"} \; Q_2$$

$$\frac{\bar{V}_3 \bar{I}_3}{\bar{V}_4 \bar{I}_4} = A_3 = e^{2\gamma_{3i}} \quad \text{"} \quad \text{"} \; Q_3$$

$$A_T = \frac{\bar{V}_1 \bar{I}_1}{\bar{V}_4 \bar{I}_4} = e^{2\gamma_T}$$

$$A_T = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = e^{2(\gamma_{1i} + \gamma_{2i} + \gamma_{3i})}$$

attenuazione totale

costanti di trasferimento immagine dei singoli quadripoli.

$$\gamma_{iT} = \gamma_{1i} + \gamma_{2i} + \gamma_{3i}$$

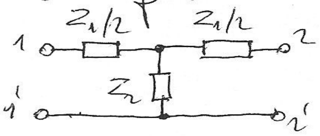
costante di trasferimento immagine complessiva

$$\gamma_{iT} = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{V}_1 \bar{I}_1}{\bar{V}_4 \bar{I}_4}$$

$\gamma_{iT} = \alpha_{iT} + j\beta_{iT}$ attenuazione in Neper

2) Quadripoli simmetrici

Con riferimento alla struttura a T simmetrica si ha:



$$Z_0 = \sqrt{Z_{ca} Z_{cc}}$$

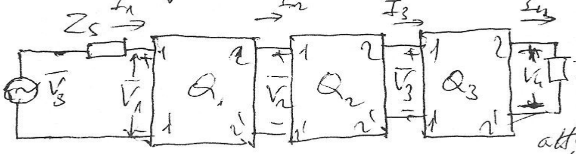
impedenza caratteristica

Z_{ca}: impedenza vista da una coppia di terminali con l'uscita a vuoto

Z_{cc}: impedenza vista da una coppia di terminali con l'uscita in cortocircuito.

Le impedenze iterative e le impedenze immagini coincidono con Z_0. Analogamente si procede per le strutture a π.

Adattamento di quadripoli simmetrici in cascata chiusi sull'impedenza caratteristica Z_0



$Z_L = Z_0$

$\alpha_{0T} = \ln\left|\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_4}\right| = \ln\left|\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_4}\right|$

attenuazione totale (in Neper)

$Z_S = Z_0$

Ogni quadripolo vede all'uscita (2, 2') l'impedenza caratteristica.

Il generatore eroga la massima potenza al carico $Z_L = Z_0$

In questo caso, essendo i quadripoli chiusi su Z_0, il rapporto fra le tensioni coincide con il rapporto tra le correnti:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}, \quad \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_3} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_3}, \quad \frac{\bar{V}_3}{\bar{V}_4} = \frac{\bar{I}_3}{\bar{I}_4}$$

essendo $\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}$, ecc...

$$A_T = \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_4} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_4} = A_1 \cdot A_2 A_3 = e^{\gamma_{01}+\gamma_{02}+\gamma_{03}} = e^{\gamma_{0T}}$$

attenuazione totale

γ_{0T}: costante di trasferimento complessiva

$$\gamma_{0T} = \ln\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_4} = \ln\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_4}$$

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = A_1 = e^{\gamma_{01}}$$

attenuazione

γ_{01} costante di trasferimento

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_3} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_3} = A_2 = e^{\gamma_{02}}$$

$$\frac{\bar{V}_3}{\bar{V}_4} = \frac{\bar{I}_3}{\bar{I}_4} = A_3 = e^{\gamma_{03}}$$

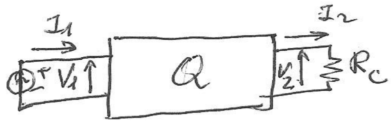
$\gamma_{0T} = \alpha_{0T} + j\beta_{0T}$ ← costante di fase

QUADRIPOLI

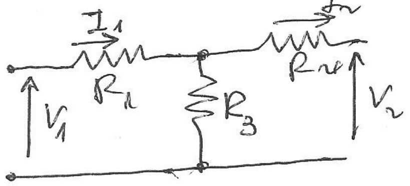
1

Modello matematico di un quadripolo con parametri generali A, B, C, D.

Esempio: quadripolo a T



$$\begin{cases} V_1 = A V_2 + B I_2 \\ I_1 = C V_2 + D I_2 \end{cases}$$



$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}$$ adimensionale (con uscita a vuoto)

attenuazione di tensione

$$B = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \quad (\Omega)$$

transimpedenza d'ingresso con uscita in cortocircuito

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \quad (S)$$

transconduttanza d'ingresso con uscita a vuoto.

$$D = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \quad \text{(adimensionale)}$$

attenuazione di corrente con uscita in cortocircuito.

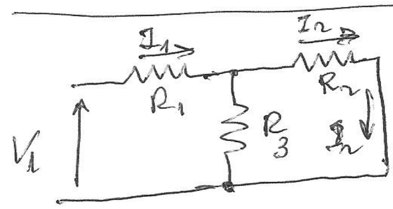
Quadripolo simmetrico ~~se~~ $A = D$

" reciproco ~~se~~ $B = C$

2

$$V_2 = \frac{V_1 R_3}{R_1+R_3} \quad ; \quad A = \frac{V_1}{V_2}\Bigg|_{I_2=0} = \frac{R_1+R_3}{R_3}$$

(uscita a vuoto)



$V_2=0$

(uscita in cortocircuito)

$$I_2 = \frac{V_1}{R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}}\cdot\frac{R_3}{R_2+R_3} =$$

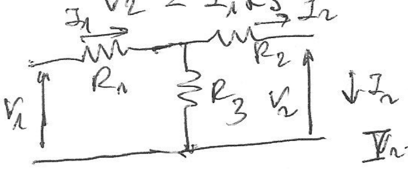
$$= \frac{V_1}{\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{\cancel{R_2+R_3}}}\cdot\frac{R_3}{\cancel{R_2+R_3}} =$$

$$= \frac{V_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

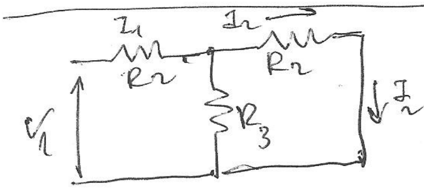
$$B = \frac{V_1}{I_2}\Bigg|_{V_2=0} = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_3}$$

$$V_2 = I_1 R_3 \qquad C = \frac{I_1}{V_2}\Bigg|_{I_2=0} = \frac{1}{R_3} \qquad \frac{I_1}{R_3 I_1} = \frac{1}{R_3}$$

(uscita a vuoto)



$I_2=0$



$$I_2 = \frac{I_1R_3}{R_2+R_3}$$

$V_2=0$

$$D = \frac{I_1}{I_2}\Bigg|_{V_2=0} = \frac{R_2+R_3}{R_3}$$

(uscita in cortocircuito)

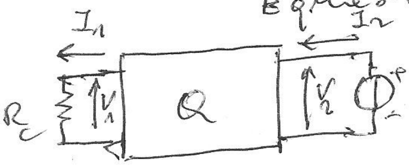
$\Delta = AD - BC = 1$

(per il teorema di reciprocità)

$$AD - BC = \left(\frac{R_1+R_3}{R_3}\right)\left(\frac{R_2+R_3}{R_3}\right) - \left(\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_3}\right)\cdot\frac{1}{R_3} =$$

$$= \frac{\cancel{R_1R_2} + \cancel{R_2R_3} + \cancel{R_1R_3} + R_3^2 - \cancel{R_1R_2} - \cancel{R_1R_3} - \cancel{R_2R_3}}{R_3^2} = 1$$

Equazioni inverse.



$$\begin{cases} V_2 = \dfrac{D V_1}{\Delta} - \dfrac{B}{\Delta} I_1 \\[2ex] I_2 = -\dfrac{C}{\Delta} V_1 + \dfrac{A}{\Delta} I_1 \end{cases}$$

$$-I_2 = \frac{C}{\Delta} V_1 - \frac{A}{\Delta} I_1$$

$$\begin{cases} A V_2 + B I_2 = V_1 \\ C V_2 + D I_2 = I_1 \end{cases}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & B \\ I_1 & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}} = \frac{V_1 D - B I_1}{AD - BC} = \frac{V_1}{\Delta} D - \frac{B}{\Delta} I_1$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} A & V_1 \\ C & I_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}} = \frac{A I_1 - C V_1}{AD - BC} = \frac{A}{\Delta} I_1 - \frac{C}{\Delta} V_1$$

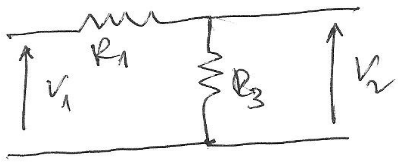
$I_1' = -I_1 \qquad V_1' = V_1$

$I_2' = -I_2 \qquad V_2' = V_2$

$$\begin{cases} V_2' = \dfrac{D}{\Delta} V_1' + \dfrac{B}{\Delta} I_1' \\[2ex] I_2' = \dfrac{C}{\Delta} V_1' + \dfrac{A}{\Delta} I_1' \end{cases}$$

Caso particolare: 4

Se $R_2 = 0$, $R_1 = 35{,}355\,\Omega$, $R_3 = 35{,}355\,\Omega$.



$R_{i1} = \sqrt{R_{ica} R_{icc}}$

$R_{ica} = R_1 + R_3 = 2 \cdot 35{,}355 = 70{,}71\,\Omega$

$R_{icc} = R_1 = 35{,}355$

$R_{i1} = \sqrt{70{,}71 \cdot 35{,}355} = \sqrt{2499{,}952} = 49{,}99\,\Omega \cong 50\,\Omega$

$$A = \frac{R_1 + R_3}{R_3} = \frac{35{,}355 + 35{,}355}{35{,}355} = 2$$

$$B = \frac{\cancel{R_1 R_2} + R_1 R_3 + \cancel{R_2 R_3}}{R_3} = R_1 = 35{,}355\,\Omega.$$

$$C = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{35{,}355}\,S = 0{,}02828\,S$$

$$D = \frac{R_2 + R_3}{R_3} = \frac{0 + 35{,}355}{35{,}355} = 1$$

$$\Delta = AD - BC = 2 \cdot 1 - 35{,}355 \cdot \frac{1}{35{,}355} = 1$$

$$\begin{cases} V_1 = A V_2 + B I_2 = 2 V_2 + 35{,}355\, I_2 \\ I_1 = C V_2 + D I_2 = 0{,}02828\, V_2 + I_2 \end{cases}$$

Se $V_2 = 100\ mV$ e $I_2 = 2\ mA$

$$\begin{cases} V_1 = 2 \cdot 0{,}1 + 35{,}355 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0{,}27071\ V \\ I_1 = 0{,}02828 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 10^{-3} = 0{,}004828\ A \end{cases}$$

Verifica:
$$\begin{cases} V_2 = V_1 D - B I_1 = 0{,}27071 \cdot 1 - 35{,}355 \cdot 0{,}004828 = 0{,}1\,V \\ I_2 = A I_1 - C V_1 = 2 \cdot 0{,}004828 - 0{,}02828 \cdot 0{,}27071 = 0{,}0028\ A \\ \cong 2\,m \end{cases}$$

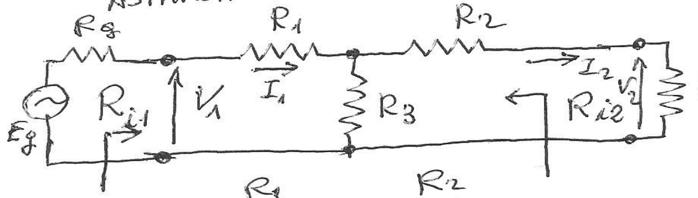
TRASFORMAZIONE DI IMPEDENZA CON RETI RESISTIVE PER L'ADATTAMENTO DI IMPEDENZA TRA GENERATORE E CARICO (MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA)

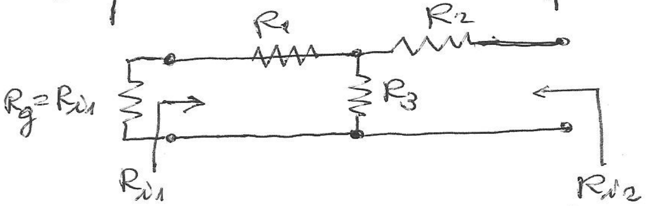
1) RETE RESISTIVA A T ASIMMETRICA

RESISTENZE (IMPEDENZE) IMMAGINE: R_{i1}, R_{i2}

R_C: RESISTORE DI CARICO

R_g: RESISTENZA INTERNA DEL GEN





L'ADATTAMENTO DI IMPEDENZA SI BASA SULLE CONDIZIONI:

1) $R_c = R_{i2}$; 2) $R_g = R_{i1}$

Se $K = \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1 I_1}{V_2 I_2}$ = ATTENUAZIONE DI POTENZA

P_1: POTENZA ENTRANTE

P_2: POTENZA ASSORBITA DAL CARICO (USCENTE)

PERDITA DELLA RETE IN dB : $10 \log_{10} \frac{V_1 I_1}{V_2 I_2} = 10 \log_{10} K$

SI DEFINISCE LA COSTANTE DI TRASFERIMENTO IMMAGINE

$\gamma = \alpha + j\beta$ (α: COSTANTE DI ATTENUAZIONE; β: COSTANTE DI FASE).

ESSENDO LA RETE RESISTIVA, $\beta = 0$, IN QUANTO NON C'E' SFASAMENTO TRA SEGNALI D'USCITA E D'INGRESSO

PERTANTO $\gamma = \alpha$

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{2\alpha}$$

$$e^{\gamma} = \sqrt{K} = e^{\alpha + j\beta} = e^{\alpha}$$

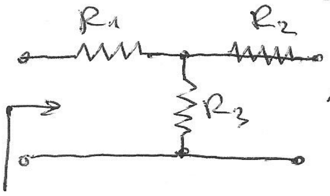
$$e^{\alpha} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \sqrt{\frac{I_1^2 R_{i1}}{I_2^2 R_{i2}}} = \frac{I_1}{I_2}\sqrt{\frac{R_{i1}}{R_{i2}}} = \sqrt{\frac{\frac{V_1^2}{R_{i1}}}{\frac{V_2^2}{R_{i2}}}} = \frac{V_1}{V_2}\sqrt{\frac{R_{i2}}{R_{i1}}}$$

Se $R_{i1} = R_{i2} = R_0$ (quadripolo simmetrico con $R_1 = R_2$)

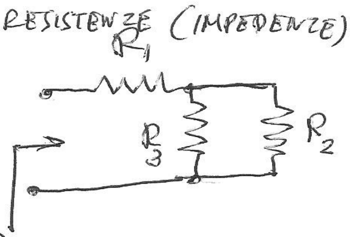
LE (IMPEDENZE) RESISTENZE IMMAGINE COINCIDONO CON LA RESISTENZA (IMPEDENZA) CARATTERISTICA R_0

CALCOLO DELLE RESISTENZE (IMPEDENZE) IMMAGINE

1) LATO 1



USCITA A VUOTO



R_{1ca}
RESISTENZA D'INGRESSO CON USCITA A VUOTO (CARICO STACCATO)

R_{1cc}
RESISTENZA D'INGRESSO CON USCITA IN CORTOCIRCUITO

$$R_{1ca} = R_1 + R_3$$

$$R_{1cc} = R_1 + R_2 // R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

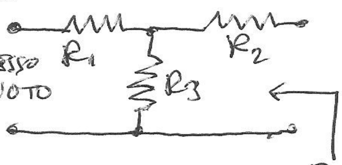
$$R_{i1} = \sqrt{R_{1ca} \cdot R_{1cc}} = \sqrt{(R_1 + R_3)\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right)} =$$

RESISTENZA IMMAGINE LATO 1

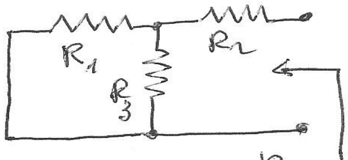
$$= \sqrt{\frac{(R_1 + R_3)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_2 + R_3}}$$

2) LATO 2

INGRESSO A VUOTO



R_{2ca}



R_{2cc}

$$R_{2ca} = R_2 + R_3$$

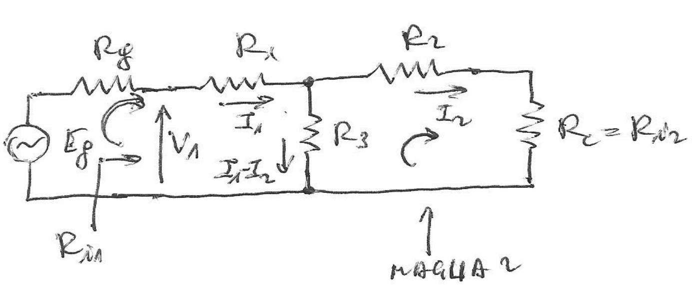
$$R_{2cc} = R_2 + R_1 // R_3 = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

$$R_{i2} = \sqrt{R_{2ca} \cdot R_{2cc}} = \sqrt{(R_2 + R_3)\left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\right)} =$$

RESISTENZA IMMAGINE LATO 2

$$= \sqrt{\frac{(R_2 + R_3)(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}{R_1 + R_3}}$$

L3



$$-(I_1 - I_2) R_3 + R_2 I_2 + R_c I_2 = 0$$

$$I_1 R_3 = I_2 (R_2 + R_3 + R_c)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + R_3 + R_c}{R_3}$$

$$e^{\alpha} = \sqrt{K} = \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{R_{i1}}{R_{i2}}} = \frac{R_2 + R_3 + R_c}{R_3} \sqrt{\frac{R_{i1}}{R_{i2}}}$$

Se $R_{i1} = R_{i2} = R_0$ RESISTENZA CARATTERISTICA (PER UNA ~~RETE~~ RETE SIMMETRICA CON $R_1 = R_2$)

$$e^{\alpha} = \sqrt{K} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + R_3 + R_c}{R_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

(ATTENUAZIONE DI CORRENTE) (ATTENUAZIONE DI TENSIONE)

LE ATTENUAZIONI DI TENSIONE E DI CORRENTE COINCIDONO CON L'ATTENUAZIONE DI POTENZA

IN dB L'ATTENUAZIONE DI POTENZA È $A_{P\,(dB)} = 10 \log_{10} K = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 10 \log_{10} [e^{2\alpha}]$

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{2\alpha}$$

L'ATTENUAZIONE DI POTENZA IN dB È

$$A_{P\,(dB)} = 10 \log_{10} \left[\frac{\frac{V_1^2}{R_{i1}}}{\frac{V_2^2}{R_{i2}}} \right] = 10 \log_{10} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 + 10 \log_{10} \frac{R_{i2}}{R_{i1}}$$

Se $R_{i2} = R_{i1}$ (QUADRIPOLO SIMMETRICO CON $R_1 = R_2$)

$$A_{P(dB)} = 20 \log_{10} \frac{V_1}{V_2}$$

IN GENERALE (QUADRIPOLO ASIMMETRICO) SI HA:

$$A_{P(dB)} = 20 \log_{10} \frac{V_1}{V_2} + 10 \log_{10} \frac{R_{i2}}{R_{i1}}$$

FORMULE DI PROGETTO
PER L'ADATTATORE A T
(DATI: K, R_{i1} e R_{i2})

$$R_3 = \frac{2\sqrt{K}}{K-1} \sqrt{R_{i1} R_{i2}}$$

$$R_1 = \frac{R_{i1}(K+1)}{K-1} - \frac{2\sqrt{K}\sqrt{R_{i1}R_{i2}}}{K-1} = \frac{(K+1)R_{i1} - 2\sqrt{K}\sqrt{R_{i1}R_{i2}}}{K-1}$$

$$R_2 = \frac{(K+1)R_{i2} - 2\sqrt{K}\sqrt{R_{i1}R_{i2}}}{K-1}$$

1° CASO ATTENUATORE CON PERDITE MINIME (K MINIMO)

$$(K+1)R_{i2} = 2\sqrt{K}\sqrt{R_{i1}R_{i2}}, \quad R_2 = 0$$

DOVENDO ESSERE $R_2 > 0$, SI HA

$$(K_{min}+1)R_{i2} - 2\sqrt{K_{min}}\sqrt{R_{i1}R_{i2}} \geq 0$$

$$K_{min} R_{i2} + R_{i2} = 2\sqrt{K_{min} R_{i1} R_{i2}} \ldots$$

$$K_{min}^2 R_{i2}^2 + R_{i2}^2 + 2K_{min} R_{i2}^2 - 4K_{min} R_{i1} R_{i2} \geq 0$$

5)

$$R_{i2}^2 K_{min}^2 + \left(2R_{i2}^2 - 4R_{i1}R_{i2}\right)K_{min} + R_{i2}^2 = 0$$

$$R_{i2} K_{min}^2 + 2\left(R_{i2} - 2R_{i1}\right)K_{min} + R_{i2} = 0$$

$$K_{min} = \frac{-\left(R_{i2} - 2R_{i1}\right) \pm \sqrt{\cancel{R_{i2}^2} + 4R_{i1}^2 - 4R_{i1}R_{i2} - \cancel{R_{i2}^2}}}{R_{i2}} =$$

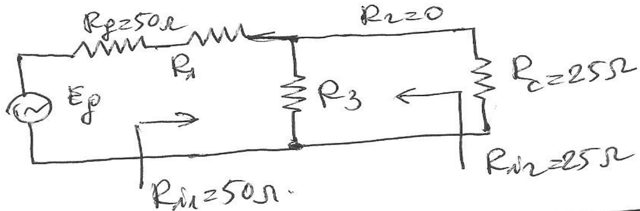
$$= -1 + 2\frac{R_{i1}}{R_{i2}} + 2\sqrt{\left(\frac{R_{i1}}{R_{i2}}\right)^2 - \frac{R_{i1}}{R_{i2}}}$$

1° ESEMPIO DI PROGETTO, con $R_{i1} > R_{i2}$ e $R_2 = 0$

$R_{i1} = 50\,\Omega$, $R_{i2} = 25\,\Omega$

$$R_3 = \frac{2\sqrt{K}}{K-1}\sqrt{R_{i1}R_{i2}}$$

$$R_1 = \frac{(K+1)R_{i1} - 2\sqrt{K}\sqrt{R_{i1}R_{i2}}}{K-1}$$



$$K_{min} = -1 + 2\cdot\frac{50}{25} + 2\sqrt{\left(\frac{50}{25}\right)^2 - \frac{50}{25}} = -1 + 4 + 2\sqrt{4-2} =$$

$$= 3 + 2\sqrt{2} = 5{,}828$$

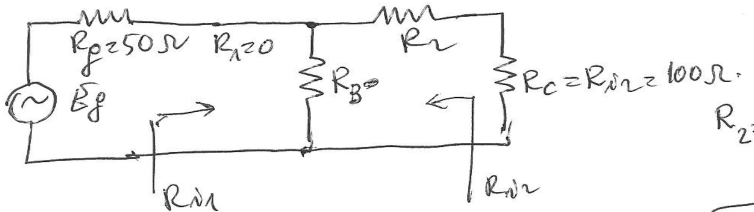
$$A_{p\,min}(\mathrm{dB}) = 10\log_{10} K_{min} = 10\log_{10} 5{,}828 = 10\cdot 0{,}644 = 7{,}65\ \mathrm{dB}$$

$$R_3 = \frac{2\sqrt{5{,}828}}{5{,}828-1}\sqrt{50\cdot 25} = \frac{4{,}828}{4{,}828}\sqrt{1250} = 35{,}355\,\Omega$$

$$R_1 = \frac{(5{,}828+1)\,50 - 2\sqrt{5{,}828}\cdot\sqrt{50\cdot 25}}{5{,}828-1} = \frac{341{,}4 - 170{,}74}{4{,}828} = 35{,}355\,\Omega.$$

2° ESEMPIO DI PROGETTO, con $R_{i1} < R_{i2}$, e $R_1 = 0$ 6 bis

$R_{i1} = 50\Omega$, $R_{i2} = 100\Omega$



$$R_3 = \frac{2\sqrt{K}}{K-1}\sqrt{R_{i1} R_{i2}}$$

$$R_2 = \frac{(K+1)R_{i2} - 2\sqrt{K}\sqrt{R_{i1}R_{i2}}}{K-1}$$

$$R_1 = \frac{(K+1)R_{i1} - 2\sqrt{K}\sqrt{R_{i1}R_{i2}}}{K-1} = 0$$

$$(K+1)R_{i1} = 2\sqrt{K}\sqrt{R_{i1}R_{i2}} \quad \text{se } R_1 = 0$$

$$(K_{min}+1)R_{i1} - 2\sqrt{K_{min}}\sqrt{R_{i1}R_{i2}} = 0$$

$$K_{min}R_{i1} + R_{i1} = 2\sqrt{K_{min}R_{i1}R_{i2}}$$

$$K_{min}^2 R_{i1}^2 + R_{i1}^2 + 2K_{min}R_{i1}^2 = 4K_{min}R_{i1}R_{i2}$$

$$R_{i1}^2 K_{min}^2 + 2(R_{i1}^2 - 2R_{i1}R_{i2}) + R_{i1}^2 = 0$$

$$R_{i1} K_{min}^2 + 2(R_{i1} - 2R_{i2}) + R_{i1} = 0$$

$$K_{min} = \frac{-(R_{i1} - 2R_{i2}) \pm \sqrt{\cancel{R_{i1}^2} + 4R_{i2}^2 - 4R_{i1}R_{i2} - \cancel{R_{i1}^2}}}{R_{i1}} =$$

$$= -1 + \frac{2R_{i2}}{R_{i1}} + 2\sqrt{\left(\frac{R_{i2}}{R_{i1}}\right)^2 - \frac{R_{i2}}{R_{i1}}} =$$

$$= -1 + 2\cdot\frac{100}{50} + 2\sqrt{\left(\frac{100}{50}\right)^2 - \frac{100}{50}} = -1 + 4 + 2\sqrt{4-2} =$$

$$= 3 + 2\sqrt{2} = 5{,}828$$

$$A_{p\,min}(dB) = 10\log_{10}K_{min} = 10\log_{10}5{,}828 = 10\cdot 0{,}644 = 7{,}65\,dB$$

7

$$R_2 = \frac{(5{,}828+1)\,100 - 2\sqrt{5{,}828}\,\sqrt{50\cdot 100}}{5{,}828-1} =$$

$$= \frac{682{,}8 - 341{,}408}{4{,}828} = \frac{341{,}392}{4{,}828} = 70{,}710\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{2\sqrt{5{,}828}}{5{,}828-1}\sqrt{50\cdot 100} = 1\cdot\sqrt{5000} = 70{,}710\ \Omega.$$

(8)

$$\sqrt{K} = \frac{I_1}{I_2}\sqrt{\frac{R_{i1}}{R_{i2}}} = \frac{V_1}{V_2}\sqrt{\frac{R_{i2}}{R_{i1}}}$$

$$K = 5{,}828 = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\frac{R_{i1}}{R_{i2}}}} = \frac{\sqrt{5{,}828}}{\sqrt{\frac{50}{100}}} = \frac{\sqrt{5{,}828}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 3{,}414$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\frac{R_{i2}}{R_{i1}}}} = \frac{\sqrt{5{,}828}}{\sqrt{\frac{100}{50}}} = \frac{\sqrt{5{,}828}}{\sqrt{2}} = 1{,}707$$

$$A_V(dB) = 20\log_{10} 1{,}707 = 4{,}644 \text{ dB}$$

$$A_I(dB) = 20\log_{10} 3{,}414 = 10{,}665 \text{ dB}$$

$$A_P(dB) = 10\log_{10} K = 10\log_{10} 5{,}828 = 7{,}65 \text{ dB}$$

oppure $A_P(dB) = 20\log_{10}\frac{V_1}{V_2} + 10\log_{10}\frac{R_{i2}}{R_{i1}} =$

$$= 20\cdot\log_{10} 1{,}707 + 10\log_{10}\frac{100}{50} = 4{,}644 + 3{,}010 =$$

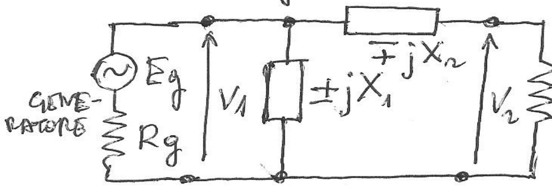
$$= 7{,}65 \text{ dB}$$

QUADRIPOLI ADATTATORI CON COMPONENTI REATTIVI

RETI ADATTATRICI A L

DATI: R_g resistenza interna del generatore
R_c resistenza di carico
Si suppone, per semplicità, che siano nulle la reattanza X_g del generatore e la reattanza X_c del carico.

1° caso: $R_g > R_c$



Se definiamo le impedenze $\bar{Z}_1 = \pm jX_1$ e $\bar{Z}_2 = R_c \mp jX_2$, abbiamo quanto segue:

a) Si calcola l'ammettenza totale $\bar{Y}_{1,2} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$, con

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{\pm jX_1} \quad e \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{R_c \mp jX_2} = \frac{R_c \pm jX_2}{(R_c \mp jX_2)(R_c \pm jX_2)} =$$

$$= \frac{R_c \pm jX_2}{R_c^2 + X_2^2} = \frac{R_c}{R_c^2 + X_2^2} \pm \frac{jX_2}{R_c^2 + X_2^2}.$$

Indicando con $Q_s = \frac{X_2}{R_c}$ il fattore di merito relativo all'impedenza $\bar{Z}_2$, otteniamo:

$$\bar{Y}_2 = \frac{R_c}{R_c^2\left(1 + \frac{X_2^2}{R_c^2}\right)} \pm \frac{j\frac{X_2}{R_c}}{R_c\left(1 + \frac{X_2^2}{R_c^2}\right)} = \frac{1}{R_c(1+Q_s^2)} \pm \frac{jQ_s}{R_c(1+Q_s^2)}$$

b) L'adattamento generatore-carico si ottiene imponendo sia le condizione di risonanza, cioè l'annullamento della suscettanza complessiva $B_{1,2}$ del circuito ($\bar{Y}_{1,2}$ ammettenza totale), sia l'uguaglianza tra la conduttanza $G_g = \frac{1}{R_g}$ del generatore e la conduttanza $\frac{1}{R_c(1+Q_s^2)} = G_{1,2}$:

$$\bar{Y}_{1,2} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 =$$

$$= \frac{1}{\pm jX_1} + \underbrace{\frac{1}{R_c(1+Q_s^2)}}_{G_{1,2}} \pm \frac{jQ_s}{R_c(1+Q_s^2)} = G_{1,2} \underbrace{\mp \frac{j}{X_1} \pm \frac{jQ_s}{R_c(1+Q_s^2)}}_{B_{1,2}} = G_{1,2} + jB_{1,2}$$

c) Riassumendo, le condizioni di adattamento sono le seguenti (teorema di Carson)

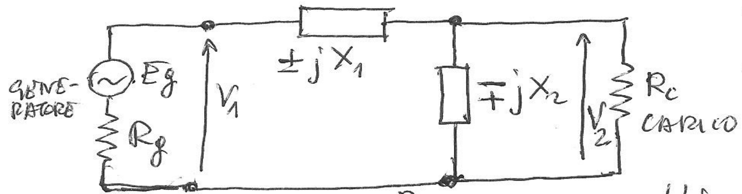
$$\begin{cases} G_g = \frac{1}{R_g} = G_{1,2} = \frac{1}{R_c(1+Q_s^2)} \\ B_{1,2} = \mp\frac{j}{X_1} \pm \frac{jQ_s}{R_c(1+Q_s^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_g = R_c(1+Q_s^2);\quad R_g = R_c + R_cQ_s^2;\quad Q_s^2 = \frac{R_g - R_c}{R_c}; \\ Q_s = \sqrt{\frac{R_g}{R_c}-1} = \sqrt{n-1}, \quad \text{con } n = \frac{R_g}{R_c}. \\ \pm\frac{j}{X_1} = \frac{\pm jQ_s}{R_c(1+Q_s^2)} = \pm\frac{jQ_s}{R_g};\quad \mp jX_1 = \mp j\frac{R_g}{Q_s} \end{cases}$$

FORMULE DI PROGETTO:

$$\begin{cases} \mp jX_1 = \mp j\frac{R_g}{Q_s}; \qquad n = \frac{R_g}{R_c};\ Q_s = \sqrt{n-1} \\ \pm jX_2 = \pm jR_cQ_s = \pm j\frac{R_gQ_s}{n}; \end{cases}$$

2° caso: $R_g < R_c$



Se definiamo le impedenze $\bar{Z}_1 = \pm jX_1$ e $\bar{Z}_2 = \frac{1}{\bar{Y}_2} = \frac{1}{G_c \pm jB_2}$, con $G_c = \frac{1}{R_c}$ e $B_2 = \frac{1}{X_2}$, abbiamo quanto segue:

Q_p (FATTORE DI MERITO DI Y_2) $= \frac{R_c}{X_2}$

a) Si calcola l'impedenza totale $\bar{Z}_{1,2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$, con

$$\bar{Z}_2 = \frac{1}{G_c \pm jB_2} = \frac{G_c \mp jB_2}{(G_c \pm jB_2)(G_c \mp jB_2)} = \frac{G_c \mp jB_2}{G_c^2 + B_2^2} = \frac{G_c}{G_c^2+B_2^2} \mp \frac{jB_2}{G_c^2+B_2^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{R_c}}{\frac{1}{R_c^2}+\frac{1}{X_2^2}} \mp \frac{\frac{j}{X_2}}{\frac{1}{R_c^2}+\frac{1}{X_2^2}} = \frac{R_c}{1+\frac{R_c^2}{X_2^2}} \mp \frac{jR_c\frac{R_c}{X_2}}{1+\frac{R_c^2}{X_2^2}} = \frac{R_c}{1+Q_p^2} \mp \frac{jQ_pR_c}{1+Q_p^2}$$

b) L'adattamento generatore-carico si ottiene imponendo sia la condizione di risonanza, cioè l'annullamento della reattanza complessiva $X_{1,2}$ del circuito ($Z_{1,2}$ impedenza totale), sia l'uguaglianza tra la resistenza $\frac{R_c}{1+Q_p^2} = R_{1,2}$ e la resistenza R_g del generatore:

$$\bar{Z}_{1,2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = \pm jX_1 + \underbrace{\frac{R_c}{1+Q_p^2}}_{R_{1,2}} \mp \frac{jQ_pR_c}{1+Q_p^2}$$

$X_{1,2}$

c) Riassumendo, le condizioni di adattamento sono le seguenti (teorema di Carson):

$$\begin{cases} R_g = R_{1,2} = \dfrac{R_c}{1+Q_p^2} \\ X_{1,2} = \pm jX_1 \mp \dfrac{jQ_pR_c}{1+Q_p^2} = 0 \end{cases}$$

$$R_g + R_g Q_p^2 = R_c; \quad Q_p^2 = \frac{R_c - R_g}{R_g} = \frac{R_c}{R_g} - 1$$

$$Q_p = \sqrt{\frac{R_c}{R_g} - 1} = \sqrt{n-1} \qquad \text{con } n = \frac{R_c}{R_g}$$

FORMULE DI PROGETTO

$$\begin{cases} \pm jX_1 = \pm jQ_pR_g \\ \mp jX_2 = \mp j\dfrac{R_c}{Q_p} = \mp j\dfrac{nR_g}{Q_p} \end{cases}$$

$$n = \frac{R_c}{R_g}; \qquad Q_p = \sqrt{n-1}$$

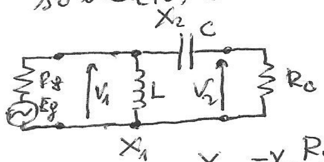
ESERCIZIO N. 1 $(R_g > R_c)$ 4

DATI: $f = 1\,MHZ$, $R_g = 50\,\Omega$; $R_c = 25\,\Omega$. (CARICO)
$E_g = 100\,mV$

$\boxed{V_1\,?\quad V_2\,?\quad \text{IN dB}\,?\quad \frac{V_1}{V_2}\,?}$

$$n = \frac{R_g}{R_c} = \frac{50}{25} = 2 \quad ; \quad Q_s = \sqrt{n-1} = 1$$

1ª soluzione



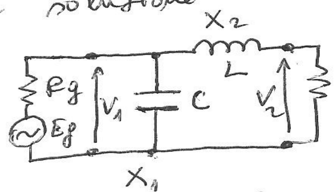
$$X_1 = X_L = \frac{R_g}{Q_s} = \frac{50}{1} = 50\,\Omega$$

$$X_1 = X_L = \omega L = 2\pi f L \; ; \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{50}{6{,}28 \cdot 10^6} = 7{,}96 \cdot 10^{-6}\,H = 7{,}96\,\mu H$$

$$X_2 = X_C = \frac{R_g\,Q_s}{n} = \frac{50 \cdot 1}{2} = 25\,\Omega \; ;$$

$$X_2 = X_C = \frac{1}{2\pi f C} \; ; \quad C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 25} = 6{,}36 \cdot 10^{-9}\,F = 6{,}36\,nF$$

2ª soluzione



$$X_1 = X_C = \frac{R_g}{Q_s} = \frac{50}{1} = 50\,\Omega$$

$$X_1 = X_C = \frac{1}{2\pi f C} \; ; \quad C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 50} = 3{,}18\,nF \; ;$$

$$X_2 = X_L = \frac{R_g\,Q_s}{n} = \frac{50 \cdot 1}{2} = 25\,\Omega$$

$$X_2 = X_L = 2\pi f L \; ; \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{25}{6{,}28 \cdot 10^6} = 3{,}98 \cdot 10^{-6}\,H = 3{,}98\,\mu H$$

$$Z_{i1} = \sqrt{Z_{ca1}\,Z_{cc1}}$$

IMPEDENZA IMMAGINE LATO 1

$$Z_{ca1} = \pm j X_1 = \pm j\,50\,\Omega$$

$$Z_{cc1} = \frac{\pm j X_1 (\mp j X_2)}{\pm j X_1 \mp j X_2} = \frac{X_1 X_2}{\pm j (X_1 - X_2)} = \frac{50 \cdot 25}{\pm j\,(50-25)} = \mp j\,50\,\Omega$$

$$Z_{i1} = \sqrt{\pm j 50 (\mp j 50)} = \sqrt{50^2} = 50\,\Omega$$

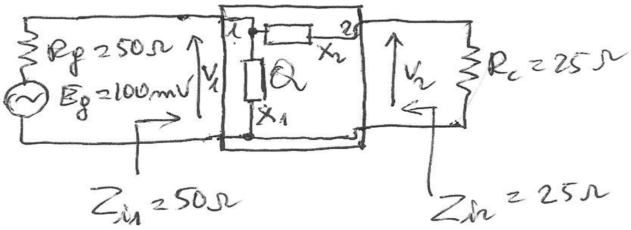
$$Z_{i2} = \sqrt{Z_{ca2} Z_{cc2}}$$

IMPEDENZA
IMMAGINE
LATO 2

$$Z_{ca2} = \mp j(X_1 - X_2) = \mp j(50-25) = \mp j\,25\,\Omega$$

$$Z_{cc2} = \pm j X_2 = \pm j\,25\,\Omega$$

$$Z_{i2} = \sqrt{(\mp j25)(\pm j25)} = \sqrt{25^2} = 25\,\Omega$$



$$\bar{V}_1 = \frac{E_g Z_{i1}}{Z_{i1} + R_g} = \frac{E_g \cdot 50}{50+50} = \frac{E_g}{2} = 50\,mV$$

$$\bar{V}_2 = \frac{\bar{V}_1 R_c}{R_c \pm j X_2} = \frac{\bar{V}_1 \cdot 25}{25 \pm j25} = \frac{\bar{V}_1}{1 \pm j}$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 (1 \pm j) \quad ; \quad \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = 1 \pm j \quad \begin{cases} + ; X_2 = X_L \\ - ; X_2 = X_C \end{cases}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

$$A_V = 20 \log_{10} \frac{V_1}{V_2} = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 20 \log_{10} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{20}{2} \log_{10} 2 = 10 \cdot 0{,}3 = 3\,dB$$

$$V_2 = \frac{V_1}{\sqrt{2}} = \frac{50}{\sqrt{2}} = 35{,}35\,mV$$

$$P_1 = \frac{V_1^2}{Z_{i1}} = \frac{(50 \cdot 10^{-3})^2}{50} = 5 \cdot 10^{-5}\,W = 50\,mW \quad ; \quad P_2 = \frac{V_2^2}{R_c} = \frac{\left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 10^{-6}}{25} = \frac{2500 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 25} = 50 \cdot 10^{-6}\,W = 50\,mW$$

ESERCIZIO N. 2 $(R_g < R_c)$ 6

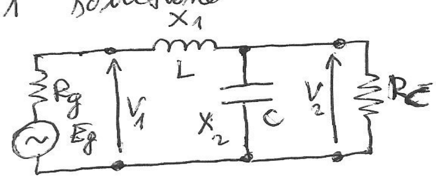
DATI: $f = 1\,MHz$, $R_g = 50\,\Omega$, $R_c = 300\,\Omega$

$E_g = 100\,mV$

$\boxed{V_1 ? \quad V_2 ? \quad \frac{V_1}{V_2} ? \quad \text{IN dB?}}$

$$n = \frac{R_c}{R_g} = \frac{300}{50} = 6 \quad ; \quad Q_p = \sqrt{n-1} = \sqrt{5} = 2{,}236$$

1^a soluzione



$$X_1 = X_L = Q_p R_g = 2{,}236 \cdot 50 = 111{,}8\,\Omega$$

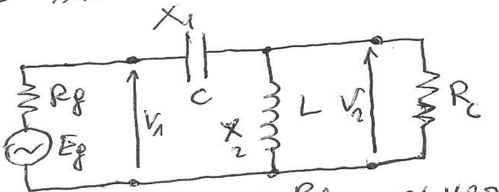
$$X_L = 2\pi f L$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{111{,}8}{6{,}28 \cdot 10^6} = 1{,}78 \cdot 10^{-5}\,H = 17{,}8\,\mu H$$

$$X_2 = X_c = \frac{n R_g}{Q_p} = \frac{6 \cdot 50}{2{,}236} = 134{,}168\,\Omega \quad ; \quad X_c = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f X_c} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 134{,}168} = 1{,}186 \cdot 10^{-9}\,F = 1{,}186\,nF$$

2^a soluzione



$$X_1 = X_c = Q_p R_g = 111{,}8\,\Omega$$

$$X_1 = X_c = \frac{1}{2\pi f C} \quad ; \quad C = \frac{1}{2\pi f X_c} =$$

$$= \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 111{,}8} = 1{,}424 \cdot 10^{-9}\,F =$$

$$= 1{,}424\,nF$$

$$X_2 = X_L = \frac{n R_g}{Q_p} = 134{,}168\,\Omega$$

$$X_2 = X_L = 2\pi f L$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{134{,}168}{6{,}28 \cdot 10^6} = 2{,}136 \cdot 10^{-5}\,H = 21{,}36\,\mu H$$

$$Z_{i1} = \sqrt{Z_{ca1} Z_{cc1}}$$

IMPEDENZA IMMAGINE LATO 1

$$Z_{cc1} = \pm j X_1 = \pm j\,111{,}8\,\Omega$$

$$Z_{ca1} = \pm j(X_1 - X_2) = \pm j\,(111{,}8 - 134{,}168) =$$

$$= \mp j\,22{,}368\,\Omega$$

$$Z_{i1} = \sqrt{\mp j\,22{,}368\,(\pm j\,111{,}8)} =$$

$$\cong \sqrt{2500} = 50\,\Omega$$

7

$$Z_{i2} = \sqrt{Z_{ca2} Z_{cc2}}$$

IMPEDENZA IMMAGINE (LATO 2)

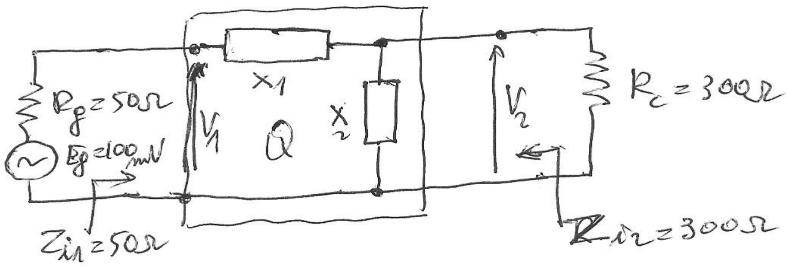
$$Z_{ca2} = \mp j X_2 = \mp j\,134{,}168\,\Omega$$

$$Z_{ca1} = \frac{\mp j X_2 (\pm j X_1)}{\pm j (X_1 - X_2)} =$$

$$= \frac{\mp j\,134{,}168 (\pm j\,111{,}8)}{\pm j (111{,}8 - 134{,}168)} = \frac{\pm\,14999{,}98}{\mp j\,22{,}368} =$$

$$= \pm j\,670{,}599\,\Omega$$

$$Z_{i2} = \sqrt{\mp 134{,}168 \cdot (\pm j\,670{,}599)} = \sqrt{90000} = 300\,\Omega$$



$$V_1 = \frac{E_g Z_{i1}}{Z_{i1} + R_g} = \frac{E_g \cdot 50}{50 + 50} = \frac{E_g}{2} = 50\,mV$$

$$R_c /\!/ jX_2 = \frac{R_c (\pm j X_2)}{R_c \pm j X_2} = \frac{300 (\pm j\,134{,}168)}{300 \pm j\,134{,}168} =$$

$$= \frac{\pm j\,40250}{300 \pm j\,134{,}168} = \frac{\pm j\,40250 (300 \mp j\,134{,}168)}{300^2 + 134{,}168^2} =$$

$$= \pm j \frac{40250}{108001} (300 \mp j\,134{,}168) = \pm j\,0{,}37268 (300 \mp j\,134{,}168) =$$

$$= (\pm j\,111{,}8 + 50)\,\Omega$$

Filtri passivi realizzati con elementi reattivi
– Filtri LC a K costante.

Generalità sui filtri.

Il filtri sono quadripoli, attivi o passivi, utilizzati per ~~tra~~ mettere senza attenuazione segnali compresi in una certa banda di frequenze (banda passante) ed eliminare (o almeno attenuare fortemente) segnali con frequenze non comprese nella banda passante (banda oscura). I filtri ideali ~~sono~~ caratterizzati da una brusca (discontinua) transizione dalla banda passante alla banda oscura e possono essere classificati secondo quattro tipi fondamentali: 1) filtri passa-basso (Low Pass) LP, che consentono il passaggio di tutti i segnali con frequenza da 0 fino ad una frequenza massima (frequenza di taglio) ed eliminano tutte le frequenze al di là di quella di taglio.

2) filtri passa-alto (High Pass - HP), che consentono il passaggio di tutte le frequenze maggiori della frequenza di taglio, eliminando i segnali con frequenza inferiore.

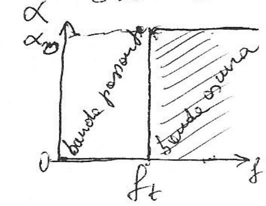
3) filtri passa-banda (Band Pass, BP), che consentono il passaggio dei segnali con frequenze comprese entro la banda passante ed eliminano ~~i segnali con~~ frequenza esterna a tale banda.

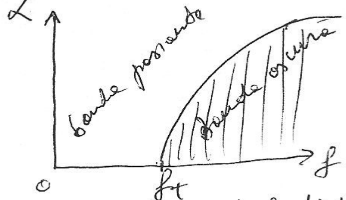
4) filtri elimina-banda (Band Stop, BS), che consentono il passaggio dei segnali con frequenze esterne alla banda oscura ed eliminano ~~i~~ segnali con frequenza compresa entro la banda oscura.

Curve ideali e reali dell'attenuazione α, relativa ai filtri LP, HP, BP e BS (α in dB o in Neper)

Ideale — Reale

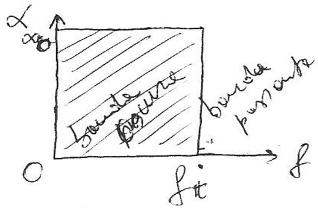
1) Passa-basso

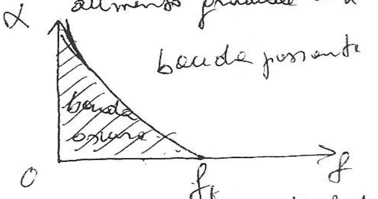




aumento graduale di α

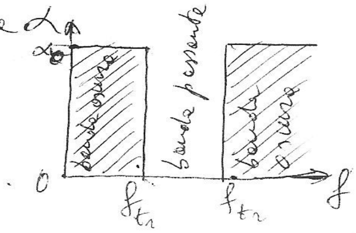
2) Passa-alto

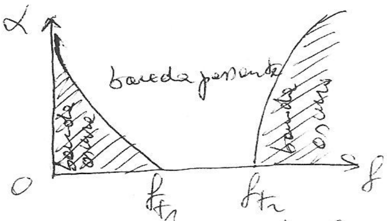




diminuzione graduale di α

3) Passa-banda

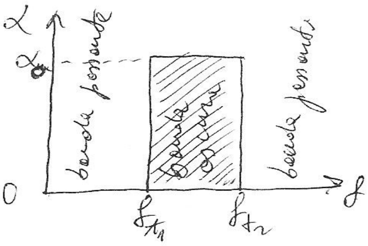


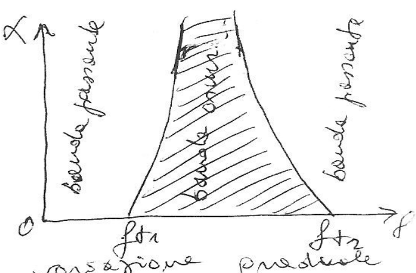


variazione graduale di α per $f < f_{t1}$ ed $f > f_{t2}$

4) Elimina-banda

α_0 rappresenta l'attenuazione in banda oscura (considerata di valore finito)





variazione graduale di α per $f > f_{t1}$ ed $f < f_{t2}$

I filtri passivi LC impiegano soltanto componenti reattivi (induttanze e condensatori), ~~per~~ i quali si considerano trascurabili la resistenza ohmica dell'avvolgimento (induttanze) e le resistenze ohmiche serie e parallelo associate alle perdite dei condensatori. ~~[illegible]~~ Rispetto ai filtri passivi RC ed RL (filtri di Butterworth) presentano il grande vantaggio di trasmettere quasi integralmente la potenza dal generatore al carico, essendo costituiti soltanto da componenti reattivi che non dissipano potenza attiva.

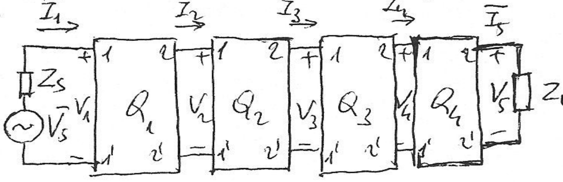
Considerazioni di progetto

Consideriamo in particolare i filtri LC passivi a K costante con struttura a T ed a Π, caratterizzati dal fatto che ~~è~~ è costante (indipendente da $\omega = 2\pi f$) il prodotto dell'impedenza totale del ramo serie per l'impedenza totale del ramo parallelo.

Per il calcolo della banda passante di questo tipo di filtro si deve ~~[illegible]~~ tutto ricavare per la struttura simmetrica a T e per la struttura simmetrica a Π l'espressione dell'impedenza caratteristica Z_0 e determinare quindi gli intervalli ~~dei~~ valori di f (o di ω) nei quali l'impedenza caratteristica risulta reale. Infatti, se il filtro è alimentato da un generatore di segnale con impedenza interna pari a Z_0 ed è chiuso su un carico resistivo pari all'impedenza caratteristica, si ottiene il massimo trasferimento di potenza dal generatore al carico (i segnali passano senza attenuazione ($\alpha = 0$)) nelle bande di frequenza in cui l'impedenza caratteristica Z_0 risulta reale (resistiva), mentre vengono ~~[illegible]~~ fortemente attenuati i segnali con frequenza tale da rendere immaginaria l'impedenza caratteristica Z_0.

Guadagni ed attenuazioni di potenza, di tensione e di corrente espressi in Neper (Np) ed in decibel (dB)
(Livelli relativi di potenza, tensione e corrente)

Consideriamo il quadripolo Q_2 inserito in una catena di quadripoli (attivi e passivi) interposti tra il generatore di segnale V_s ed il carico Z_L.



Si definiscono i seguenti guadagni ed attenuazioni di potenza, di tensione e di corrente espressi in Np, cioè utilizzando i logaritmi neperiani o naturali.

Guadagno (attenuazione) di potenza tra l'uscita e l'ingresso del quadripolo Q_2:

$$\underset{\text{(Np)}}{G_p} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{V}_2 \bar{I}_2}{\bar{V}_1 \bar{I}_1}$$, essendo

(Neper) P_1 e P_2 le potenze apparenti d'ingresso e d'uscita. $\boxed{\underset{app.}{P_1} = \underset{attiva}{P_a} + j \underset{reattiva}{P_R} \quad P_2 = P_{2a} + j P_{2R}}$

Se G_p è positivo, $\frac{P_2}{P_1} > 1$ e si ha un'amplificazione di potenza, se G_p è negativo, $\frac{P_2}{P_1} < 1$ e si ha un'attenuazione di potenza.

Guadagno (attenuazione) di tensione tra l'uscita e l'ingresso di Q_2:

$$\underset{\text{(Np)}}{G_V} = \ln \frac{V_2}{V_1}$$

(Neper)

Guadagno (attenuazione) di corrente tra l'uscita e l'ingresso di Q_2:

$$G_I = \ln \frac{I_2}{I_1}$$

Guadagno di potenza in decibel (dB)
(attenuazione)

$$G_{p\,(dB)} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2 I_2}{V_1 I_1}$$

Guadagno di tensione in decibel (dB)

$$G_{v\,(dB)} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1}$$

Guadagno di corrente in decibel (dB)

$$G_I = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1}$$

Se si devono esprimere solo attenuazioni (mediante numeri positivi) si considerano nelle formule precedenti i rapporti $\frac{P_1}{P_2}$, $\frac{V_1}{V_2}$ e $\frac{I_1}{I_2}$ (con $I_1 > I_2$, $P_1 > P_2$, $V_1 > V_2$)

Per trovare la relazione tra decibel (dB) e Neper (Np), basta tenere presente che il logaritmo neperiano di un numero è pari a 2,302 volte il suo logaritmo decimale;

$$\ln x = 2{,}302 \log_{10} x \qquad G_{p\,(Np)} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2}\, 2{,}302 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = \frac{2{,}302}{2 \cdot 10} \cdot \underbrace{\boxed{10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}}}_{G_p(dB)} =$$

$$= 0{,}115\ G_p(dB)$$

quindi se $G_{p\,(Np)} = 1\ Np$, $G_{p\,(dB)} = \frac{1}{0{,}115}\ Np \simeq 8{,}69\ dB$

$$\begin{cases} 1\ Np = 8{,}68\ dB \\ 1\ dB = 0{,}115\ Np \end{cases}$$

Relazione tra guadagni di potenza, di corrente e di tensione

$$\underset{(N_p)}{G_P} = \boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{P_2}{P_1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\bar{V}_2\bar{I}_2}{\bar{V}_1\bar{I}_1} = \frac{1}{2}\ln\frac{V_2}{V_1}+\frac{1}{2}\ln\frac{I_2}{I_1} = \frac{G_V}{2}+\frac{G_I}{2}$$

oppure: $\underset{(N_p)}{G_P} = \frac{1}{2}\ln\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2}\ln\frac{V_2^2/Z_2}{V_1^2/Z_1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\cdot\frac{Z_1}{Z_2} =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\ln\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{2}\ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{2}\ln\frac{Z_1}{Z_2} =$$

$$= \ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{2}\ln\frac{Z_1}{Z_2} = \boxed{\underset{(N_p)}{G_V} + \frac{1}{2}\ln\frac{Z_1}{Z_2}}$$

oppure: $\underset{(N_p)}{G_P} = \frac{1}{2}\ln\frac{I_2^2 Z_2}{I_1^2 Z_1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2\cdot\frac{Z_2}{Z_1} = \ln\frac{I_2}{I_1} + \frac{1}{2}\ln\frac{Z_2}{Z_1} =$

$$= \boxed{\underset{(N_p)}{G_I} + \frac{1}{2}\ln\frac{Z_2}{Z_1}}$$

Soltanto se $Z_1 = Z_2 = Z_0$, cioè se il quadripolo è chiuso sull'impedenza caratteristica Z_0, i guadagni di potenza, di tensione e di corrente coincidono $G_P = G_I = G_V$ (in Neper)

$$\underset{(dB)}{G_P} = \boxed{10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}} = 10\log_{10}\frac{\bar{V}_2\bar{I}_2}{\bar{V}_1\bar{I}_1} = 10\log_{10}\frac{V_2^2/Z_2}{V_1^2/Z_1} = 10\log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\frac{Z_1}{Z_2} =$$

$$= 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1} + 10\log_{10}\frac{Z_1}{Z_2} = \boxed{G_V + 10\log_{10}\frac{Z_1}{Z_2}}$$

oppure:

$$G_{P(dB)} = 10\log_{10}\frac{I_2^2 Z_2}{I_1^2 Z_1} = 10\log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2\frac{Z_2}{Z_1} = 20\log_{10}\frac{I_2}{I_1} + 10\log_{10}\frac{Z_2}{Z_1} =$$

$$= \boxed{G_I + 10\log_{10}\frac{Z_2}{Z_1}}$$

Soltanto se il quadripolo è chiuso sull'impedenza caratteristica Z_0, i guadagni di potenza, tensione e corrente (in dB) coincidono
($Z_1 = Z_2 = Z_0$) $G_P = G_I = G_V$

Livelli assoluti di potenza, tensione e corrente

Se si stabiliscono dei livelli di riferimento per potenze, tensioni e correnti, la potenza, la tensione e la corrente in un punto qualsiasi di una catena di quadripoli o lungo una linea di trasmissione possono essere espressi in Np o più spesso in dB rispetto ai livelli di riferimento fissati.
Nella tecnica delle telecomunicazioni si assume come riferimento di potenza il valore di 1 mW (livello zero di potenza) in relazione ad un carico di 600 Ω; pertanto si possono determinare i livelli zero di tensione e di corrente

livello zero di tensione (livello di riferimento) $P_0 = 1\,mW = \frac{V_0^2}{R_0}$

$V_0 = \sqrt{P_0 R_0}$ $\quad 1\,mW = \frac{V_0^2}{600} = 10^{-3}\,W \quad V_0 = \sqrt{600 \cdot 10^{-3}} = \sqrt{0{,}6} \simeq 0{,}775\,V = 775\,mV$

$R_0 = 600\,\Omega$

livello zero di corrente $\quad P_0 = I_0^2 R_0$

$$I_0 = \sqrt{\frac{P_0}{R_0}} = \sqrt{\frac{1\,mW}{600}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{600}} \simeq \sqrt{1{,}67 \cdot 10^{-6}} \simeq 1{,}293 \cdot 10^{-3}\,A = 1{,}293\,mA$$

$$\begin{cases} P_0 = 1\,mW \text{ su } 600\,\Omega \\ I_0 = 1{,}29\,mA \\ V_0 = 0{,}775\,V \end{cases}$$

I livelli assoluti di potenza, tensione e corrente si esprimono in Np oppure in dBm, essendo il milliwatt il riferimento di potenza.

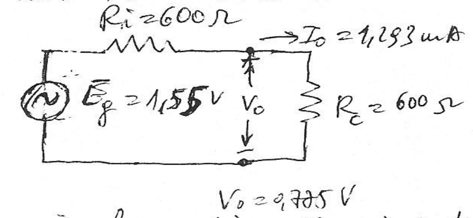
Livello assoluto di potenza $\quad l_P = \frac{1}{2} \ln \frac{P(mW)}{1\,mW}\ (Np)$ oppure $= 10 \log_{10} \frac{P(mW)}{1\,mW}\ [dBm]$

Livello assoluto di corrente $\quad l_I = \ln \frac{I(mA)}{1{,}293\,mA}\ [Np]$ oppure $= 20 \log_{10} \frac{I(mA)}{1{,}293\,mA}\ [dBm]$

Livello assoluto di tensione $\quad l_V = \ln \frac{V(mV)}{775\,mV}\ (Np)$ oppure $= 20 \log_{10} \frac{V(mV)}{775\,mV}\ (dBm)$

$\ln \rightarrow \log_e$

I valori di riferimento per i livelli assoluti di potenza, tensione e corrente si ottengono con un circuito campione alimentato da un generatore standard (normale) di tensione sinusoidale, avente una f.e.m. E_g (valore efficace) di 1,55 V ed una resistenza interna R_i di 600 Ω. Il generatore normale deve essere chiuso su un carico resistivo R_c di 600 Ω.



$$V_0 = \frac{E_g}{R_i + R_c} = \frac{E_g}{2} = 0{,}775\ \text{V}$$

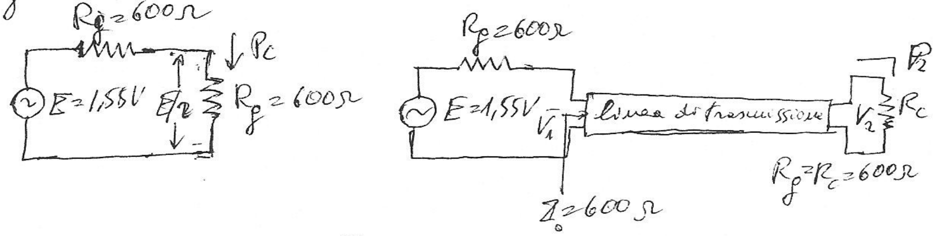
I valori più frequenti delle impedenze di linea sono i seguenti: 600 Ω, 150 Ω, 75 Ω, 50 Ω.

Equivalente di trasmissione

L'equivalente di trasmissione fornisce una misura dell'attenuazione che il segnale da trasmettere subisce in un sistema di telecomunicazioni.

Le norme internazionali fissano (CCITT) valori limite dell'equivalente di trasmissione, che non devono essere superati per non pregiudicare la qualità del collegamento. Per esempio il CCITT prescrive un equivalente massimo (attenuazione massima) di 7 dB, misurato alla frequenza di 800 Hz, per un collegamento telefonico tra due centrali ubicate in distretti diversi. Per i collegamenti nazionali, nelle peggiori condizioni, l'equivalente di trasmissione non dovrebbe superare i 33 dB.

Per la misura dell'equivalente di trasmissione di un collegamento, si schematizza la linea con un quadripolo avente impedenza caratteristica di 600 Ω e chiuso su un carico resistivo R_c di 600 Ω pari alla resistenza interna R_g del generatore normale da 1,55V.



$$\underset{(dB)}{E_q} = 10 \log_{10} \frac{P_c}{P_2}$$

L'equivalente di trasmissione rappresenta l'attenuazione (in dB) che subisce la potenza P_c trasferita al carico $R_c = R_g$ collegato direttamente al generatore normale, quando si inserisce tra generatore e carico la linea (sistema) di trasmissione.

$$E_q = 10 \log_{10} \frac{\overbrace{\frac{E^2}{4R_g}}^{\left(\frac{E}{2}\right)^2 / R_g}}{\frac{V_2^2}{R_g}} = 10 \log_{10} \frac{E^2}{4V_2^2} = 10 \log_{10} \left(\frac{E}{2V_2}\right)^2 =$$

$$= 20 \log_{10} \frac{E}{2V_2} =$$

ma $\frac{E}{2} = 0{,}775V = V_0$

$$E_q = 20 \log_{10} \frac{V_0}{V_2} = -l_V$$

dove l_V è il livello assoluto di tensione nel punto 2

Pertanto, in condizioni di adattamento di impedenza, per misurare E_q basta misurare la tensione terminale della linea (V_2)

Infatti si ha: $l_V = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_0} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{-1} =$

$$= -20 \log_{10} \frac{V_0}{V_2} = -E_q$$